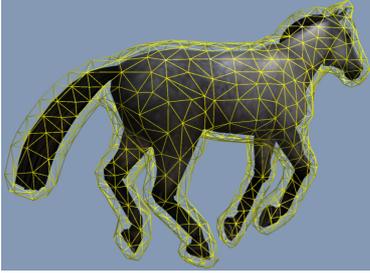




Virtuelle Realität Feder-Masse-Systeme



G. Zachmann
Clausthal University, Germany
cg.in.tu-clausthal.de



Die Newton'schen Gesetze

1. Gesetz (Trägheitsgesetz):

Ein kräftefreier Körper bewegt sich geradlinig mit konstanter Geschwindigkeit weiter.

- Ein Körper in Ruhe ist also nur ein Spezialfall hiervor.

2. Gesetz (Aktionsprinzip):

Wenn eine Kraft F auf einen Körper mit Masse m wirkt, beschleunigt sie diesen gemäß

$$F = m \cdot a$$

- Mit anderen Worten: Kraft und Beschleunigung sind proportional zueinander; die Proportionalitätskonstante ist m . Insbesondere haben beide dieselbe Richtung.

G. Zachmann Virtuelle Realität und Simulation – WS 11/12 Feder-Masse-Systeme 2

3. Gesetz (Reaktionsprinzip):

Wenn die Kraft F , die auf einen Körper wirkt, ihren Ursprung in einem anderen Körper hat, so wirkt auf diesen die entgegengesetzte Kraft $-F$.

- In der Schule lernt man : "Kraft = Gegenkraft"

4. Gesetz (Superpositionsprinzip):

Wirken auf einen Punkt (oder einen starren Körper) mehrere Kräfte F_1, \dots, F_n , so addieren sich diese vektoriell zu einer resultierenden Kraft F auf:

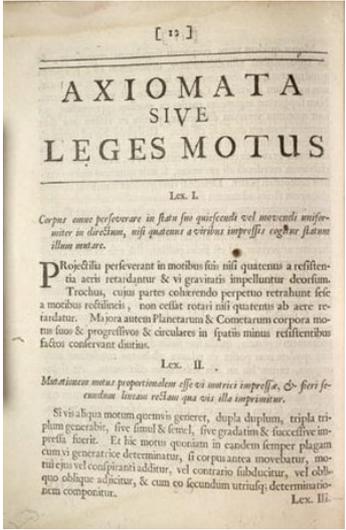
$$F = F_1 + \dots + F_n .$$

G. Zachmann Virtuelle Realität und Simulation – WS 11/12 Feder-Masse-Systeme 3

Historischer Exkurs

- Newton's Gesetze in der Originalschrift
Principia Mathematica (1687):

- Lex I. Corpus omne perseverare in statu suo quiescendi vel movendi uniformiter in directum, nisi quatenus illud a viribus impressis cogitur statum suum mutare.*
- Lex II. Mutationem motus proportionalem esse vi motrici impressae, et fieri secundum lineam rectam qua vis illa imprimitur.*



G. Zachmann Virtuelle Realität und Simulation – WS 11/12 Feder-Masse-Systeme 4

- Definition:

Ein **Feder-Masse-System** ist ein System, bestehend aus:

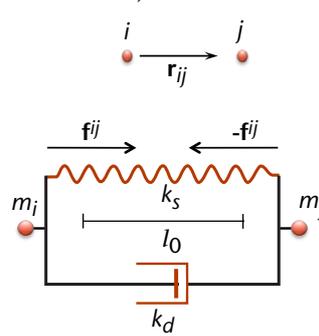
 1. einer Menge von Punktmassen m_i mit Positionen \mathbf{x}_i und Geschwindigkeit $\mathbf{v}_i, i = 1 \dots N$;
 2. einer Menge von Federn $s_{ij} = (i, j, k_s, k_d)$, die die Massen i und j verbindet, mit der Ruhelänge l_0 , Federkonstante (= Steifigkeit) k_s und den Dämpfungskoeffizienten k_d
- Vorteile:
 - Sehr einfach zu programmieren
 - Ideal zum Studium verschiedener numerischer Lösungsverfahren
 - *Ubiquitous in games* (cloths, capes, teilweise auch deformierbare Objekte, ...)
- Nachteile:
 - Einige Parameter (Federkonstanten z.B.) sind **nicht** offensichtlich
 - Keine volumetrischen Effekte (z.B. Volumenerhaltung)

G. Zachmann Virtuelle Realität und Simulation – WS 11/12 Feder-Masse-Systeme 5

Eine einzelne Feder (mit Dämpfer)

- Gegeben: Massen m_i und m_j mit Positionen $\mathbf{x}_i, \mathbf{x}_j$
- Definiere $\mathbf{r}_{ij} = \frac{\mathbf{x}_j - \mathbf{x}_i}{\|\mathbf{x}_j - \mathbf{x}_i\|}$
- Kräfte zwischen den beiden Massen :
 1. Von der Feder:

$$\mathbf{f}_s^{ij} = k_s \mathbf{r}_{ij} (\|\mathbf{x}_j - \mathbf{x}_i\| - l_0)$$
 wirkt auf Masse m_i in Richtung m_j
 2. Durch den Dämpfer: $\mathbf{f}_d^{ij} = k_d ((\mathbf{v}_j - \mathbf{v}_i) \cdot \mathbf{r}_{ij}) \mathbf{r}_{ij}$
 3. Zusammen : $\mathbf{f}^{ij} = \mathbf{f}_s^{ij} + \mathbf{f}_d^{ij}$
 4. Kraft auf m_j : $\mathbf{f}^{ji} = -\mathbf{f}^{ij}$
- Aus (4) → der Impuls bleibt erhalten!



G. Zachmann Virtuelle Realität und Simulation – WS 11/12 Feder-Masse-Systeme 6

- Alternative Federkraft:

$$\mathbf{f}_s^{ij} = k_s r_{ij} \frac{\|\mathbf{x}_j - \mathbf{x}_i\| - l_0}{l_0}$$
- Ein Feder-Dämpfer in der Realität:
 

G. Zachmann Virtuelle Realität und Simulation – WS 11/12 Feder-Masse-Systeme 7

Simulation einer einzelnen Feder

- Aus Newton'schen Gesetzen folgt: $\ddot{\mathbf{x}} = \frac{1}{m} \mathbf{f}$
- DGL der Ordnung 2 umwandeln in DGLs erster Ordnung:

$$\dot{\mathbf{v}}(t) = \frac{1}{m} \mathbf{f}(t)$$

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{v}(t)$$
- Anfangswerte: $\mathbf{v}(t_0) = \mathbf{v}_0$, $\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0$
- "Simulation" = "Integration von DGLs über die Zeit"
- Taylor-Expansion liefert:

$$\mathbf{x}(t + \Delta t) = \mathbf{x}(t) + \Delta t \dot{\mathbf{x}}(t) + O(\Delta t^2)$$
- Analog: $\mathbf{v}(t + \Delta t) = \mathbf{v}(t) + \Delta t \dot{\mathbf{v}}(t)$

→ Dieses Integrationsverfahren heißt **explizite Euler-Integration**

G. Zachmann Virtuelle Realität und Simulation – WS 11/12 Feder-Masse-Systeme 8

Der Algorithmus

```

forall particles i :
  initialize  $\mathbf{x}_i, \mathbf{v}_i, m_i$ 

loop:
  forall particles i :
     $\mathbf{f}_i \leftarrow \mathbf{f}^g + \mathbf{f}_i^{coll} + \sum_{j, (i,j) \in S} \mathbf{f}(\mathbf{x}_i, \mathbf{v}_i, \mathbf{x}_j, \mathbf{v}_j)$ 

    forall particles i :
       $\mathbf{v}_i + = \Delta t \cdot \frac{\mathbf{f}_i}{m_i}$ 
       $\mathbf{x}_i + = \Delta t \cdot \mathbf{v}_i$ 

  render system every n-th time

```

\mathbf{f}^g = Gravitationskraft
 \mathbf{f}^{coll} = Rückstoßkraft aus Kollision (z.B. mit Hindernis)

G. Zachmann Virtuelle Realität und Simulation – WS 11/12 Feder-Masse-Systeme 9

- Weitere Integrations-Schemata:
 - Midpoint
 - ...
- Vorteil: einfach zu implementieren, schnelle Ausführung pro Zeitschritt
- Nachteil: nur für sehr kleine Schrittweiten stabil
 - Typ.weise $\Delta t \approx 10^{-4} \dots 10^{-3}$ sec!
 - Bei großen Schrittweiten wird zusätzliche Energie im System erzeugt, und schließlich explodiert es ☹
 - Beispiel: Overshooting bei einfacher Feder
- Weiterer Nachteil: Fehler akkumulieren sich schnell (bei Euler)

G. Zachmann Virtuelle Realität und Simulation – WS 11/12 Feder-Masse-Systeme 10

Beispiel für die Instabilität des Euler-Integrationsverfahrens

- Betrachte die DGL

$$\dot{x}(t) = -kx(t)$$
- Die exakte Lösung:

$$x(t) = x_0 e^{-kt}$$
- Das Euler-Verfahren liefert:

$$x^{t+1} = x^t + \Delta t(-kx^t)$$
- Falls $\Delta t > \frac{1}{k}$:

$$x^{t+1} = x^t \underbrace{(1 - k\Delta t)}_{<0}$$

$\Rightarrow x^t$ oszilliert um 0, geht aber (hoffentlich) gegen 0
- Falls $\Delta t > \frac{2}{k} \Rightarrow x^t \rightarrow \infty !$

G. Zachmann Virtuelle Realität und Simulation – WS 11/12 Feder-Masse-Systeme 11

Visualisierung:

$\dot{x}(t) = -x(t)$

- Bezeichnung: falls k groß \rightarrow "steife DGL" ("stiff ODE")
 - Dann muß Δt sehr klein sein

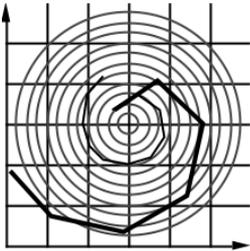
G. Zachmann Virtuelle Realität und Simulation – WS 11/12 Feder-Masse-Systeme 12

Veranschaulichung der Fehlerakkumulation

- Betrachte die DGL:

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \begin{pmatrix} -x_2 \\ x_1 \end{pmatrix}$$
- Exakte Lösung:

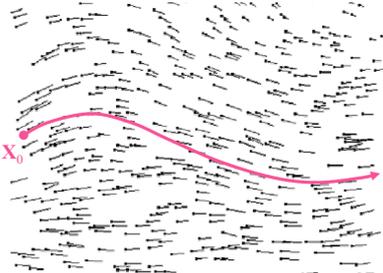
$$\mathbf{x}(t) = \begin{pmatrix} r \cos(t + \phi) \\ r \sin(t + \phi) \end{pmatrix}$$
- Euler läuft in Spiralen nach außen, egal wie klein die Schrittweite gewählt wird!
- Fazit: Euler-Integration akkumuliert Fehler, egal wie klein die Schrittweite ist!



G. Zachmann Virtuelle Realität und Simulation – WS 11/12 Feder-Masse-Systeme 13

Veranschaulichung von DGLs

- Die allgemeine Form einer DGL (hier):

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{f}(\mathbf{x}(t), t)$$
- Visualisiere \mathbf{f} als Vektorfeld:
 
- Achtung: dieses Vektorfeld kann sich mit t ändern!
- Lösung eines Anfangswertproblems = Pfad durch dieses Feld

G. Zachmann Virtuelle Realität und Simulation – WS 11/12 Feder-Masse-Systeme 14

■ Runge-Kutta 2-ter Ordnung:

- Idee: approximiere $f(x(t), t)$ durch quadratische Funktion, die an der Stelle $x(t), x(t + \frac{1}{2}\Delta t)$ und durch $v(t)$ definiert wird
- Der Integrator (o. Bew.):

$$\mathbf{a}_1 = \mathbf{v}^t \qquad \mathbf{a}_2 = \frac{1}{m} \mathbf{f}(\mathbf{x}^t, \mathbf{v}^t)$$

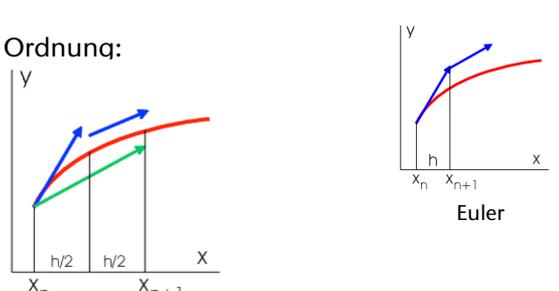
$$\mathbf{b}_1 = \mathbf{v}^t + \frac{1}{2} \Delta t \mathbf{a}_2 \qquad \mathbf{b}_2 = \frac{1}{m} \mathbf{f}\left(\mathbf{x}^t + \frac{1}{2} \Delta t \mathbf{a}_1, \mathbf{v}^t + \frac{1}{2} \Delta t \mathbf{a}_2\right)$$

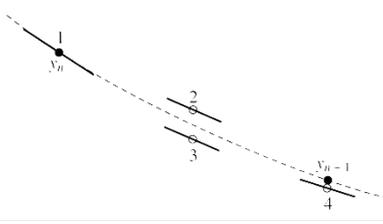
$$\mathbf{x}^{t+1} = \mathbf{x}^t + \Delta t \mathbf{b}_1 \qquad \mathbf{v}^{t+1} = \mathbf{v}^t + \Delta t \mathbf{b}_2$$

■ Runge-Kutta 4-ter Ordnung:

- Der Standard-Integrator unter den expliziten Integrations-Schemata
- Benötigt 4 Funktionsauswertungen (Kräfte berechnen) pro Zeitschritt
- Konvergenzordnung: $e(\Delta t) = O(\Delta t^4)$

G. Zachmann Virtuelle Realität und Simulation – WS 11/12 Feder-Masse-Systeme 15

■ Runge-Kutta 2-ter Ordnung:
 

■ Runge-Kutta 4-ter Ordnung:
 

G. Zachmann Virtuelle Realität und Simulation – WS 11/12 Feder-Masse-Systeme 16

Verlet-Integration

- Alternative Methode zur Steigerung der Konvergenzordnung: verwende Werte aus der **Vergangenheit**
- Verlet: verwendet $\mathbf{x}(t - \Delta t)$
- Herleitung:
 - Taylor-Reihe in beide Zeitrichtungen entwickeln:

$$\mathbf{x}(t + \Delta t) = \mathbf{x}(t) + \Delta t \dot{\mathbf{x}}(t) + \frac{1}{2} \Delta t^2 \ddot{\mathbf{x}}(t) + \frac{1}{6} \Delta t^3 \dddot{\mathbf{x}}(t) + O(\Delta t^4)$$

$$\mathbf{x}(t - \Delta t) = \mathbf{x}(t) - \Delta t \dot{\mathbf{x}}(t) + \frac{1}{2} \Delta t^2 \ddot{\mathbf{x}}(t) - \frac{1}{6} \Delta t^3 \dddot{\mathbf{x}}(t) + O(\Delta t^4)$$

G. Zachmann Virtuelle Realität und Simulation – WS 11/12 Feder-Masse-Systeme 17

- Addieren:

$$\mathbf{x}(t + \Delta t) + \mathbf{x}(t - \Delta t) = 2\mathbf{x}(t) + \Delta t^2 \ddot{\mathbf{x}}(t) + O(\Delta t^4)$$

$$\mathbf{x}(t + \Delta t) = 2\mathbf{x}(t) - \mathbf{x}(t - \Delta t) + \Delta t^2 \ddot{\mathbf{x}}(t) + O(\Delta t^4)$$
- Initialisierung:

$$\mathbf{x}(\Delta t) = \mathbf{x}(0) + \Delta t \mathbf{v}(0) + \frac{1}{2} \Delta t^2 \left(\frac{1}{m} \mathbf{f}(\mathbf{x}(0), \mathbf{v}(0)) \right)$$
- Bemerkung: Geschwindigkeit taucht nicht mehr (explizit) auf

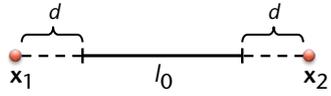
G. Zachmann Virtuelle Realität und Simulation – WS 11/12 Feder-Masse-Systeme 18

Constraints

- Großer Vorteil gegenüber Euler & Runge-Kutta: man kann sehr leicht Constraints behandeln
- Definition: **Constraint** = Einschränkung der Position eines oder mehrerer Massenpunkte
- Beispiele:
 1. Ein Massenpunkt darf nicht in ein Hindernis eindringen
 2. Der Abstand zwischen zwei Massenpunkten soll konstant sein, oder \leq bestimmter Abstand

G. Zachmann Virtuelle Realität und Simulation – WS 11/12 Feder-Masse-Systeme 19

- Verfahren anhand eines Beispiels:
 - Constraint:

$$\|\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2\| \stackrel{!}{=} l_0$$
 1. Führe einen Verlet-Integrationsschritt durch $\rightarrow \tilde{\mathbf{x}}^{t+1}$
 2. Enforce Constraint:
 

$$\mathbf{x}_1^{t+1} = \tilde{\mathbf{x}}_1^{t+1} + \frac{1}{2} \mathbf{r}_{12} \cdot (\|\tilde{\mathbf{x}}_2^{t+1} - \tilde{\mathbf{x}}_1^{t+1}\| - l_0)$$

$$\mathbf{x}_2^{t+1} = \tilde{\mathbf{x}}_2^{t+1} - \underbrace{\frac{1}{2} \mathbf{r}_{12} \cdot (\|\tilde{\mathbf{x}}_2^{t+1} - \tilde{\mathbf{x}}_1^{t+1}\| - l_0)}_d$$

G. Zachmann Virtuelle Realität und Simulation – WS 11/12 Feder-Masse-Systeme 20




- Problem, falls mehrere Constraints denselben Massepunkt einschränken sollen
 - Verwende Constraint-Algorithmen

G. Zachmann Virtuelle Realität und Simulation – WS 11/12 Feder-Masse-Systeme 21




Implizite Integration

- Bisherige Schemata sind nur *conditionally stable*
 - D.h.: Nur stabil für Δt in einem bestimmten Bereich
 - Dieser Bereich hängt von der Steifigkeit der Federn ab
- Ziel: *unconditionally stable*
- Eine Möglichkeit: **implizite Euler-Integration**

explizit $\mathbf{x}_i^{t+1} = \mathbf{x}_i^t + \Delta t \mathbf{v}_i^t$ $\mathbf{v}_i^{t+1} = \mathbf{v}_i^t + \Delta t \frac{1}{m_i} \mathbf{f}(\mathbf{x}^t)$	implizit $\mathbf{x}_i^{t+1} = \mathbf{x}_i^t + \Delta t \mathbf{v}_i^{t+1}$ $\mathbf{v}_i^{t+1} = \mathbf{v}_i^t + \Delta t \frac{1}{m_i} \mathbf{f}(\mathbf{x}^{t+1})$
---	---
- Wir haben jetzt ein System von nicht-linearen, algebraischen Gleichungen, mit \mathbf{x}^{t+1} und \mathbf{v}^{t+1} als **Unbekannte auf beiden Seiten**
 → **implizite Integration**

G. Zachmann Virtuelle Realität und Simulation – WS 11/12 Feder-Masse-Systeme 22

- Einsetzen:

$$\begin{aligned}
 M \mathbf{v}^{t+1} &= M \mathbf{v}^t + \Delta t \left(\mathbf{f}(\mathbf{x}^t) + \underbrace{\frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \mathbf{f}(\mathbf{x}^t)}_K \cdot (\Delta t \mathbf{v}^{t+1}) \right) \\
 &= M \mathbf{v}^t + \Delta t \mathbf{f}(\mathbf{x}^t) + \Delta t^2 K \mathbf{v}^{t+1}
 \end{aligned}$$
- K ist die Jacobi-Matrix (= Ableitung):

$$K = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x_{11}} f_{11} & \frac{\partial}{\partial x_{12}} f_{11} & \dots & \frac{\partial}{\partial x_{n3}} f_{11} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial}{\partial x_{11}} f_{n3} & \dots & \dots & \frac{\partial}{\partial x_{n3}} f_{n3} \end{pmatrix}$$
- Heißt **tangent stiffness matrix**
 - (Die normale Steifigkeitsmatrix wird im Gleichgewichtszustand ausgewertet; hier aber an einer beliebigen, aktuellen Position des Systems; daher der Name "*tangent ...*")

G. Zachmann Virtuelle Realität und Simulation – WS 11/12 Feder-Masse-Systeme 25

- Terme umordnen:

$$(M - \Delta t^2 K) \mathbf{v}^{t+1} = M \mathbf{v}^t + \Delta t \mathbf{f}(\mathbf{x}^t)$$
- Das ist von der Form:

$$A \mathbf{v}^{t+1} = \mathbf{b}$$
 mit $A \in \mathbb{R}^{3n \times 3n}$, $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^{3n}$
- Löse dieses LGS mittels einer iterativen Methode
 - Denn: A ändert sich in jedem Frame

G. Zachmann Virtuelle Realität und Simulation – WS 11/12 Feder-Masse-Systeme 26

Berechnung der Steifigkeitsmatrix

- Die Anatomie der Matrix K :
 - Eine Feder (i, j) addiert folgende vier 3×3 Untermatrizen zu K :

$$\begin{array}{c} 3i \rightarrow \\ 3j \rightarrow \end{array} \left(\begin{array}{cc} \boxed{K_{ii}} & \boxed{K_{ij}} \\ \boxed{K_{ji}} & \boxed{K_{jj}} \end{array} \right)$$

- Die Matrix K_{ij} entsteht durch die Ableitung von $\mathbf{f}_i = (f_{i1}, f_{i2}, f_{i3})$ nach $\mathbf{x}_j = (x_{j1}, x_{j2}, x_{j3})$:

$$K_{ij} = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x_{j1}} f_{i1} & \frac{\partial}{\partial x_{j2}} f_{i1} & \frac{\partial}{\partial x_{j3}} f_{i1} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{\partial}{\partial x_{j1}} f_{i3} & \cdots & \frac{\partial}{\partial x_{j3}} f_{i3} \end{pmatrix}$$
- Betrachte im folgenden nur f^s (Federkraft)

G. Zachmann Virtuelle Realität und Simulation – WS 11/12 Feder-Masse-Systeme 27

- Zunächst K_{ii} :

$$\begin{aligned} K_{ii} &= \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}_i} f_i(\mathbf{x}_i, \mathbf{x}_j) \\ &= k_s \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}_i} \left((\mathbf{x}_j - \mathbf{x}_i) - l_0 \frac{\mathbf{x}_j - \mathbf{x}_i}{\|\mathbf{x}_j - \mathbf{x}_i\|} \right) \\ &= k_s \left(-I - l_0 \frac{-I \cdot \|\mathbf{x}_j - \mathbf{x}_i\| - (\mathbf{x}_j - \mathbf{x}_i) \cdot 2 \frac{(\mathbf{x}_j - \mathbf{x}_i)^\top}{\|\mathbf{x}_j - \mathbf{x}_i\|}}{\|\mathbf{x}_j - \mathbf{x}_i\|^2} \right) \\ &= k_s \left(-I + l_0 \frac{1}{\|\mathbf{x}_j - \mathbf{x}_i\|} I + \frac{2l_0}{\|\mathbf{x}_j - \mathbf{x}_i\|^3} (\mathbf{x}_j - \mathbf{x}_i)(\mathbf{x}_j - \mathbf{x}_i)^\top \right) \end{aligned}$$

G. Zachmann Virtuelle Realität und Simulation – WS 11/12 Feder-Masse-Systeme 28

■ Aus einigen Symmetrien folgt:

- $K_{ij} = \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}_j} f_i(\mathbf{x}_i, \mathbf{x}_j) = -K_{ji}$
- $K_{jj} = \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}_j} f_j(\mathbf{x}_i, \mathbf{x}_j) = \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}_j} (-f_i(\mathbf{x}_i, \mathbf{x}_j)) = K_{ii}$
- $K_{ji} = K_{ij}$

G. Zachmann Virtuelle Realität und Simulation – WS 11/12 Feder-Masse-Systeme 29

■ Zur Erinnerung:

- $\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}$
- $\frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \|\mathbf{x}\| = \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \left(\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2} \right) = 2 \frac{\mathbf{x}^T}{\|\mathbf{x}\|}$

G. Zachmann Virtuelle Realität und Simulation – WS 11/12 Feder-Masse-Systeme 30

Lösungsverfahren

- Setze $K = 0$
- Für jede Feder (i, j) berechne K_{ij} , K_{ji} , K_{ji} , K_{ji} und akkumuliere zu K an den richtigen Stellen
- Berechne $\mathbf{b} = M \mathbf{v}^t + \Delta t f(\mathbf{x}^t)$
- Löse das LGS $\rightarrow \mathbf{v}^{t+1}$
- Berechne $\mathbf{x}^{t+1} = \mathbf{x}^t + \Delta t \mathbf{v}^{t+1}$

G. Zachmann Virtuelle Realität und Simulation – WS 11/12 Feder-Masse-Systeme 31

Vor- und Nachteile

- **Explizite** Integration:
 - + Sehr einfach zu programmieren
 - kleine Schrittweite nötig
 - Steife Federn funktionieren nicht gut
 - Kräfte werden nur um eine Feder pro Schritt propagiert
- **Implizite** Integration:
 - + Unconditionally stable
 - + Steife Federn werden besser handhabbar
 - + Globaler Solver \rightarrow Kräfte werden schon bei einem Simulationsschritt durch das ganze System propagiert
 - Große Schrittweiten nötig, da ein Schritt sehr teuer (und in Wahrheit schon aus vielen Einzelschritten besteht)
 - Unerwünschte Dämpfung durch das Integrationsverfahren selbst

G. Zachmann Virtuelle Realität und Simulation – WS 11/12 Feder-Masse-Systeme 32

Visualisierung: $\dot{x}(t) = -x(t)$

Umgangssprachliche Beschreibung:

- **Explizit** springt blind vorwärts, basierend auf der aktuellen Information
- **Implizit** springt "rückwärts" und sucht dabei eine "nächste Position genau so, daß der Rückwärtssprung bei der aktuellen Position landet"

G. Zachmann Virtuelle Realität und Simulation – WS 11/12 Feder-Masse-Systeme 33

Demo

<http://www.dhteumeuleu.com/dhtml/v-grid.html>

G. Zachmann Virtuelle Realität und Simulation – WS 11/12 Feder-Masse-Systeme 34

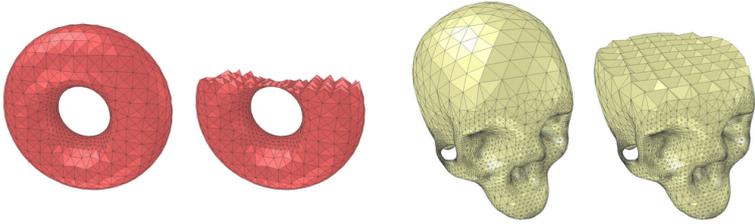
Mesh-Erzeugung für Objekte mit Volumen

- Wie erzeugt man ein Feder-Masse-System aus einem 3D-Modell?
- Direkt 3D-Geometrie in Masse-Feder-System übersetzen liefert keine guten Resultate:
 - Geometrie oft zu hoch aufgelöst
 - Degenerierte Polygone
- Bessere (sehr einfache) Idee:
 - Erzeuge ein Tetraeder-Mesh (irgendwie) aus der Geometrie
 - Jeder Vertex wird ein Massepunkt, jede Kante eine Feder
 - Verteile die Masse der Tetraeder (= Dichte \times Volumen) gleichmäßig auf die Massepunkte

G. Zachmann Virtuelle Realität und Simulation – WS 11/12 Feder-Masse-Systeme 35

Mesh-Erzeugung für Objekte mit Volumen

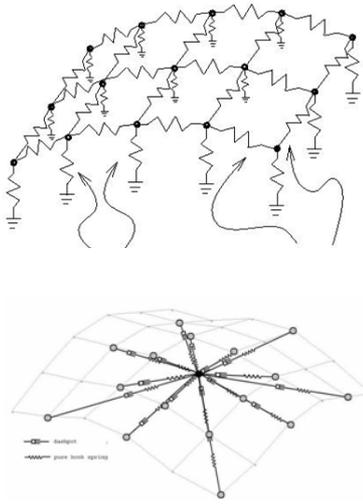
- Erzeugung des Tetraeder-Meshes (einfache Methode):
 - Verteile eine Menge von Punkten gleichmäßig (evtl. zufällig) im Inneren der Geometrie (sog. "Steiner-Punkte")
 - Dito in einer Schicht über der Oberfläche



- Verankerung des Oberflächen-Meshes im Tetraeder-Mesh:
 - Stelle jeden Vertex des Oberflächen-Meshes als baryzentrische Kombination der Tetraeder-Vertices dar, in dem er enthalten ist

G. Zachmann Virtuelle Realität und Simulation – WS 11/12 Feder-Masse-Systeme 36

- Bei 2-mannigfaltigen Feder-Masse-Systemen:
 - Verankere evtl. die Federn an einer Ruhelage
 - Führe evtl. "Querverstrebungen" ein



G. Zachmann Virtuelle Realität und Simulation – WS 11/12 Feder-Masse-Systeme 37

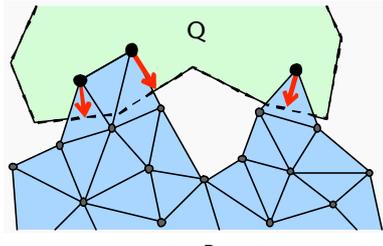
Kollisionserkennung

- Sortiere die Tetraeder in ein 3D Gitter (Hash-Tabelle!) ein
- Bei Kollision in der Hash-Tabelle:
 - Führe exakten Schnitttest zwischen 2 Tetraedern durch

G. Zachmann Virtuelle Realität und Simulation – WS 11/12 Feder-Masse-Systeme 38

Kollisionsantwort (collision response)

- Aufgabenstellung: gegeben zwei kollidierende Objekte P und Q (Tetraeder-Meshes) – welches ist die Rückstellkraft (**penalty force**)?
- Naiver Ansatz:
 - Berechne für jeden eingedrungenen Massepunkt von P die kleinste Distanz zur Oberfläche von Q → Kraft (Betrag + Richtung)
 - Problem:
 - unplausible Kräfte (implausibel?)
 - "Durchtunneln" (s. a. Force-Feedback-Kapitel)



P

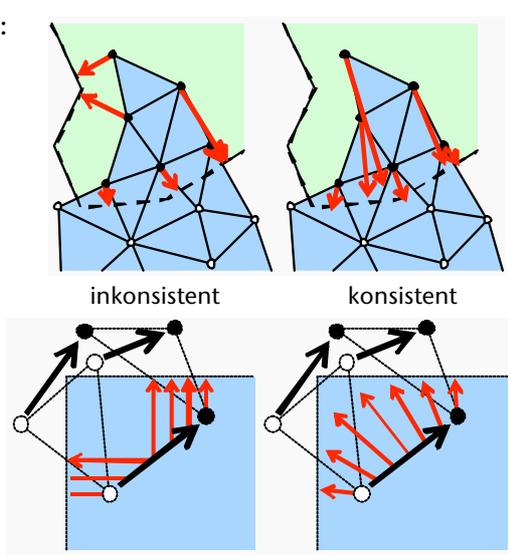
Q

P

Q

G. Zachmann Virtuelle Realität und Simulation – WS 11/12 Feder-Masse-Systeme 39

Beispiele:



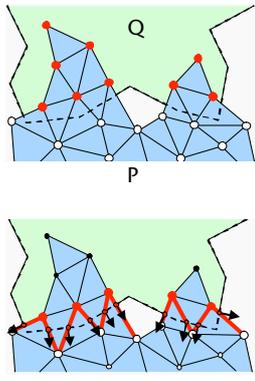
inkonsistent konsistent

inkonsistent konsistent

G. Zachmann Virtuelle Realität und Simulation – WS 11/12 Feder-Masse-Systeme 40

Konsistente Penalty Forces

1. Phase: identifiziere alle eindringenden Punkte von P
2. Phase: bestimme alle schneidenden Kanten von P
 - Berechne zu jeder solchen Schnittkante den exakten Schnittpunkt \mathbf{x}_j
 - Berechne zu jedem Schnittpunkt eine Normale \mathbf{n}_j
 - Z.B. mittels baryzentrischer Interpolation der Vertexnormalen von Q

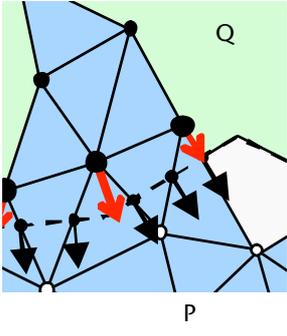


G. Zachmann Virtuelle Realität und Simulation – WS 11/12 Feder-Masse-Systeme 41

3. Phase: berechne ungefähre Kraft für "Randpunkte"
 - Randpunkt = eingedrungener Punkt \mathbf{p} inzident zu einer Schnittkante
 - Beobachtung: ein Randpunkt kann zu mehreren Schnittkanten inzident sein
 - Eindringtiefe = gewichtete Summe

$$d(\mathbf{p}) = \frac{\sum_{i=1}^k \omega(\mathbf{x}_i, \mathbf{p}) (\mathbf{x}_i - \mathbf{p}) \cdot \mathbf{n}_i}{\sum_{i=1}^k \omega(\mathbf{x}_i, \mathbf{p})}$$

wobei $d(\mathbf{p})$ = approx. Eindringtiefe von Massepunkt \mathbf{p} , \mathbf{x}_i = Schnittpunkt der Schnittkante inzident zu \mathbf{p} , \mathbf{n}_i = Normale zur Oberfläche von Q im Schnittpunkt \mathbf{x}_i ,
 und $\omega(\mathbf{x}_i, \mathbf{p}) = \frac{1}{\|\mathbf{x}_i - \mathbf{p}\|}$



G. Zachmann Virtuelle Realität und Simulation – WS 11/12 Feder-Masse-Systeme 42

▪ Richtung der Kraft für Randpunkte:

$$\hat{\mathbf{r}}(\mathbf{p}) = \frac{\sum_{i=1}^k \omega(\mathbf{x}_i, \mathbf{p}) \mathbf{n}_i}{\sum_{i=1}^k \omega(\mathbf{x}_i, \mathbf{p})} \quad \mathbf{r}(\mathbf{p}) = \hat{\mathbf{r}}(\mathbf{p})^0$$

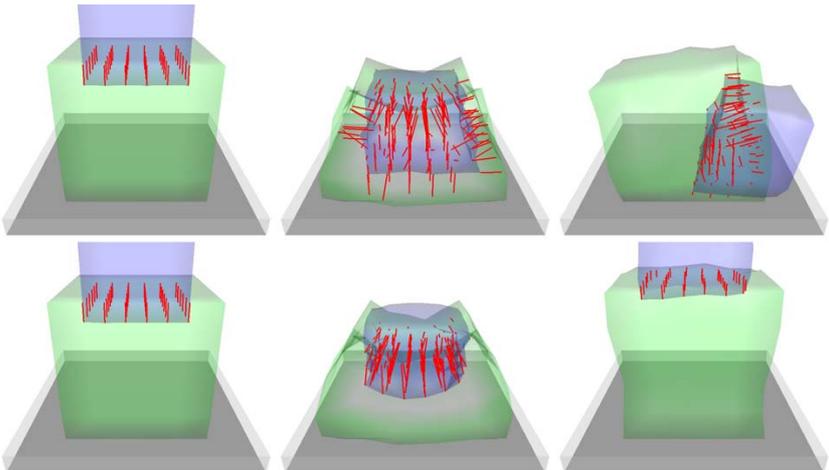
4. Phase: Propagation mittels breadth-first traversal durch das Tetraeder-Mesh

$$d(\mathbf{p}) = \frac{\sum_{i=1}^k \omega(\mathbf{p}_i, \mathbf{p}) ((\mathbf{p}_i - \mathbf{p}) \cdot \mathbf{r}_i + d(\mathbf{p}_i))}{\sum_{i=1}^k \omega(\mathbf{x}_i, \mathbf{p})}$$

wobei \mathbf{p}_i = schon besuchter eindringender Punkt von P, \mathbf{p} = noch nicht besuchter Punkt, \mathbf{r}_i = Richtung der geschätzten penalty force in Punkt \mathbf{p}_i .

G. Zachmann Virtuelle Realität und Simulation – WS 11/12 Feder-Masse-Systeme 43

▪ Visualisierung



G. Zachmann Virtuelle Realität und Simulation – WS 11/12 Feder-Masse-Systeme 44

Video

Consistent Penetration
Depth Estimation
for Deformable
Collision Response

<http://cg.informatik.uni-freiburg.de>

G. Zachmann Virtuelle Realität und Simulation – WS 11/12 Feder-Masse-Systeme 45