Untere Schranke für allgemeine Sortierverfahren

- Prinzipielle Frage: wie schnell kann ein Algorithmus (im worst case) überhaupt sein?
- Computational Model hier: RAM und nur Vergleiche auf Elemente
  - Sog. "comparison-based sorting"
- Satz:
  Zum Sortieren einer Folge von n Keys mit einem allgemeinen Sortierverfahren sind im Worst-Case, ebenso wie im Average-Case, mindestens $\Omega(n \log n)$ Vergleichsoperationen zwischen zwei Schlüsseln erforderlich.
- Beweis durch Modellierung von allgemeinen Sortierverfahren als Entscheidungsbäume

Wichtiges Charakteristikum von allgemeinem Sortieren

- Allgemeines Sortieren = Vergleichsbasiertes Sortieren:
  - Nur Vergleich von Elementpaaren wird benutzt, um die Ordnung einer Folge zu erhalten
  - Für alle Algos gilt: pro Vergleich eine konstante Anzahl weitere Operationen (z.B. 2 Elemente swappen, Schleifenzähler erhöhen, …)
  - → Daher: untere Schranke der Vergleichsanzahl = untere Schranke für die Komplexität eines vergleichsbasiertes Sortieralgorithmus'
- Alle bisher behandelten Sortierverfahren sind vergleichsbasiert
- Die bisher beste Worst-Case-Komplexität ist $O(n \log n)$ (Mergesort, Heapsort)
- Voriger Satz besagt: worst-case Komplexität von Merge- und Heapsort ist optimal

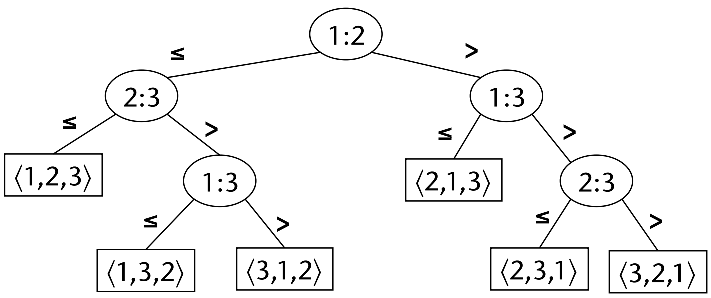
Der Entscheidungsbaum (*decision tree*)

- Abstraktion eines Sortierverfahrens durch einen Binärbaum
- Ein Entscheidungsbaum stellt eine Folge von Vergleichen dar
  - in irgend einem Sortieralgorithmus
  - für irgend welche Eingaben einer vorgegebenen Größe
  - lässt alles andere (Kontrollfluß und Datenverschiebungen) außer Acht, es werden nur Vergleiche betrachtet
- Interne Knoten bekommen Bezeichnung *i:j* = die Positionen der Elemente im Array, die verglichen werden
- Blätter werden mit Permutationen $\langle \pi(1), \pi(2), \ldots, \pi(n) \rangle$ bezeichnet, die der Algorithmus bestimmt

- Bemerkung: wird in der Praxis tatsächlich so gemacht, wenn die Elemente "fett" sind

Beispiel

- Entscheidungsbaum für Insertionsort mit drei Elementen



  - Beinhaltet 3! = 6 Blätter

- Ausführen des Sortieralgorithmus' für bestimmte Eingabe entspricht dem Verfolgen eines Weges von der Wurzel zu einem Blatt
- Entscheidungsbaum bildet alle möglichen Ausführungsabläufe ab
- Bei jedem internen Knoten findet ein Vergleich $a_i \leq a_j$ statt.
  - für $a_i \leq a_j$, folge dem linken Unterbaum
  - sonst, folge dem rechten Unterbaum
- An einem Blatt ist die Ordnung $a_{\pi(1)} \leq a_{\pi(2)} \leq \ldots \leq a_{\pi(n)}$ festgelegt
- Ein korrekter Sortieralgorithmus *muß* alle Permutationen erzeugen können
  - M.a.W.: jede der *n!* Permutationen muß bei mindestens einem Blatt des Entscheidungsbaumes vorkommen

Untere Schranke für Worst-Case

- Anzahl der Vergleiche im Worst-Case eines Sortieralgorithmus'
  = Länge des längsten Weges im Entscheidungsbaum von der Wurzel zu irgendeinem Blatt
  = die Höhe des Entscheidungsbaumes
- Untere Schranke für die Laufzeit = untere Schranke für die Höhe aller Entscheidungsbäume, in denen jede Permutation als erreichbares Blatt vorkommt

- Satz: Jeder vergleichsbasierte Sortieralgorithmus benötigt $\Omega(n \log n)$ Vergleiche im Worst-Case.
- Beweis:
  - Es reicht, die Höhe eines Entscheidungsbaumes zu bestimmen
  - h = Höhe, l = Anzahl der Blätter im Entscheidungsbaum
  - Im Entscheidungsbaum für n Elemente gilt: $l \geq n!$
  - Im Binärbaum mit der Höhe h gilt: $l \leq 2^h$
  - Also: $n! \leq l \leq 2^h \Rightarrow n! \leq 2^h \Rightarrow h \geq \log(n!)$
  - Stirling-Approximation für $n!$ liefert: $n! > \left(\frac{n}{e}\right)^n$
  - Somit : $h \geq \log(n!) \geq \log\left(\left(\frac{n}{e}\right)^n\right)$

$$= n\log(n) - n\log(e) \Rightarrow h \in \Omega(n \log n)$$

Untere Schranke für Average-Case

- Satz:

  Jedes vergleichsbasierte Sortierverfahren benötigt $\Omega(n \log n)$ Vergleiche im Mittel.

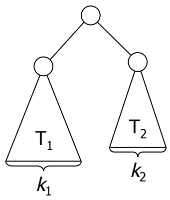
- Wir beweisen zunächst …
- Lemma:

  Die mittlere Tiefe eines Blattes eines Binärbaumes mit k Blättern ist mindestens $\log_2(k)$.

Beweis des Lemmas

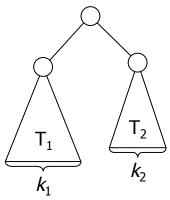
- Beweis durch Widerspruch
  - Annahme: Lemma ist falsch
  - Sei T der kleinste Binärbaum, der Lemma verletzt; T habe k Blätter
- $k \geq 2$ muss gelten (Lemma gilt ja für $k = 1$)
- T hat linken Teilbaum T_1 mit k_1 Blättern und rechten Teilbaum T_2 mit k_2 Blättern
  - es gilt $k_1 + k_2 = k$
  - bezeichne mit $\overline{d}(T)$ die mittlere Tiefe von Baum T
  - da $k_1, k_2 < k$ sind, gilt das Lemma für T_1, T_2:

$$\overline{d}(T_1) \geq \log(k_1)$$
$$\overline{d}(T_2) \geq \log(k_2)$$



- Für jedes Blatt von T gilt: Tiefe dieses Blattes, bezogen auf die Wurzel von T = Tiefe + 1, bezogen auf die Wurzel von T_1 bzw. T_2

$$k\overline{d}(T) = \sum_{\substack{\text{Blätter } b \\ \text{in } T}} \text{Tiefe von } b$$



- Also:
  Summe aller Blattiefen in T = $k_1 \left(\overline{d}(T_1) + 1\right) + k_2 \left(\overline{d}(T_2) + 1\right)$

$$\begin{aligned}
\Rightarrow \overline{d}(T) &= \frac{1}{k}\left(k_1(\overline{d}(T_1) + 1) + k_2(\overline{d}(T_2) + 1)\right) \\
&\geq \frac{k_1}{k}(\log(k_1) + 1)) + \frac{k_2}{k}(\log(k_2) + 1)) \\
&= \frac{1}{k}(k_1 \log(2k_1) + k_2 \log(2k_2)) =: f(k_1, k_2)
\end{aligned}$$

- Funktion $f(k_1,k_2)$ nimmt, unter der Nebenbedingung $k_1 + k_2 = k$, das Minimum bei $k_1 = k_2 = k/2$ an
- Also

$$\overline{d}(T) \geq \frac{1}{k}\left(\frac{k}{2}\log(k) + \frac{k}{2}\log(k)\right) = \log(k)$$

- Widerspruch zur Annahme!

Beweis des Satzes

- Mittlere Laufzeit eines Sortierverfahrens = mittlere Tiefe eines Blattes im Entscheidungsbaum
- Entscheidungsbaum hat $k \geq N!$ viele Blätter

also

$$\overline{d} \geq \log N! \geq \log\left(\frac{N}{2}\right)^{\frac{N}{2}} = \frac{N}{2}\log\left(\frac{N}{2}\right)$$

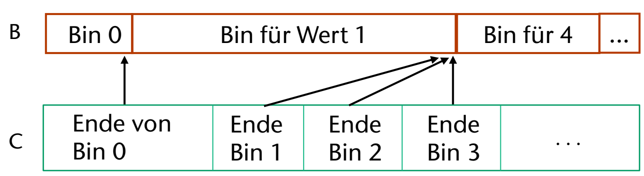
$$\overline{d} \in \Omega(N\log(N))$$

Lineare Sortierverfahren

- Bisherige Sortieralgorithmen basieren auf den Operationen
  - Vergleich zweier Elemente
  - Vertauschen der Elemente
- Führt bestenfalls zum Aufwand $N \cdot \log(N)$ (schneller geht es nicht)
- Distributionsort: Klasse von Sortierverfahren, die zusätzliche Operationen (neben Vergleichen) verwenden, z.B. arithmetische Operationen, Zählen, Zahldarstellung als Ziffernfolge, …
- Allgemeines Schema (ganz grob):
  - Verteilung (*distribute*) der Daten auf Fächer (*Bins* oder *Buckets*)
    - Dann jedes Bin separat sortieren
  - Einsammeln (*gather*) der Daten aus den Bins, wobei Ordnung innerhalb der Fächer erhalten bleiben muß(!)

Counting-Sort

- Vorbedingung: Keys kommen aus einem diskreten Bereich
  - Annahme hier: Keys sind natürliche Zahlen
- Zunächst simple Idee: reserviere für jeden mögl. Wert ein Bin
  - Problem: jedes Bin müsste potentiell Platz für alle Datensätze bieten
- Trick: verwende nur ein Ausgaberarray B und mache die Bins genau so groß, wie sie benötigt werden. Dazu muß man sich in einem zweiten Array C die Bin-Grenzen merken
- Beispiel:



Der Algorithmus

- Die Algorithmusidee:
  1. Bestimme $k = \max_i\{a_i\}$
  2. Für alle i, $0 \leq i \leq k$, bestimme Anzahl C_i der a_j mit $a_j \leq i$:

$$C_i := |\{a_j \in A \mid a_j \leq i\}|\,, \quad C_{-1} = 0$$

$$C_i - C_{i-1} = |\{a_j \in A \mid a_j = i\}|$$

  3. Erzeuge Ausgabe-Array *B*, genauso groß wie *A*
  4. Kopiere a_j mit $a_j = i$ in die Felder:

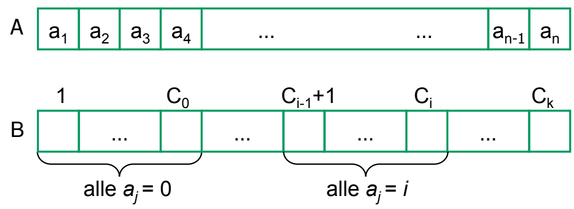


Illustration von Countingsort

```
C = [0] * (k+1)
for j in range( 0, len(A) ):
    C[ A[j] ] += 1
# post cond.: C[i] = # elements a_j = i
for i in range( 1, k+1 ):
    C[i] += C[i-1]
# post cond.: C[i] = # elements a_j <= i
B = [0] * len(A)
for j in range( len(A), 0 ):
    C[A[j]] -= 1
    B[ C[A[j]] ] = A[j]
```

	0	1	2	3	4	5	6	7
A	2	5	3	0	2	3	0	3

	0	1	2	3	4	5
C	2	2	4	7	7	8

	0	1	2	3	4	5
C	2	0	2	3	0	1

Illustration von Countingsort

```
C = [0] * (k+1)
for j in range( 0, len(A) ):
    C[ A[j] ] += 1
# post cond.: C[i] = # elements a_j = i
for i in range( 1, k+1 ):
    C[i] += C[i-1]
# post cond.: C[i] = # elements a_j <= i
B = [0] * len(A)
for j in range( len(A), 0 ):
    C[A[j]] -= 1
    B[ C[A[j]] ] = A[j]
```

	0	1	2	3	4	5	6	7
A	2	5	3	0	2	3	0	3

	0	1	2	3	4	5
C	0	2	2	4	7	7

	0	1	2	3	4	5	6	7
B	0	0	2	2	3	3	3	5

Analyse

```
C = [0] * (k+1)
for j in range( 0, len(A) ):
    C[ A[j] ] += 1
# C[i] = # elements a_j = i
for i in range( 1, k+1 ):
    C[i] += C[i-1]
# C[i] = # elements a_j <= i
for j = len(A)-1,…, 0:
    C[A[j]] -= 1
    B[ C[A[j]] ] = A[j]
```

$O(k)$

$O(n)$

$O(k)$

$O(n)$

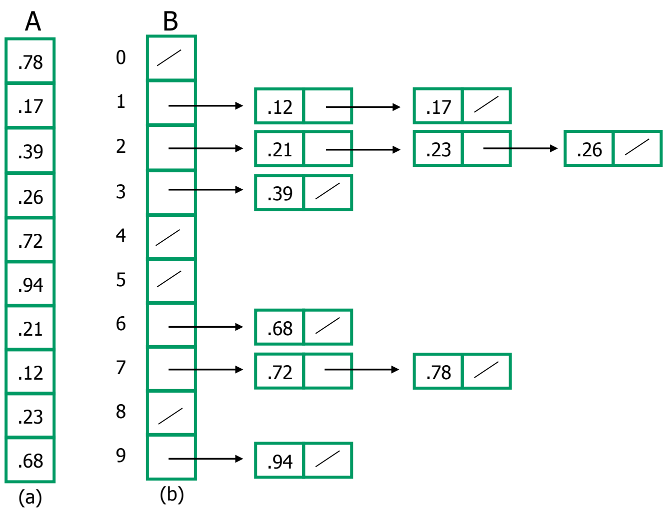
- Satz:

  Counting-Sort besitzt Laufzeit $O(n+k)$,
  wobei $k = \max_i\{a_i\} - \min_i\{a_i\}$.
- Korrolar: Gilt $k \in O(n)$, so besitzt Counting-Sort Laufzeit $O(n)$

Bucketsort

- Eingabe: Array *A* mit *n* Elementen im Bereich [0,1)
- Annahme: die Elemente sind in [0,1) gleichverteilt
  - Sonst: Skalieren (Aufwand O(n)), oder Algo etwas umschreiben
- Idee:
  - Teile [0, 1) in *k* gleich große *Buckets*, *k* konstant
  - Verteile die *n* Eingabewerte in diese *k* Buckets
  - Sortiere jedes Bucket
  - Gehe durch die Buckets der Reihe nach, hänge die Elemente an eine gesamte Liste

Beispiel



$k = n$ Bucket *i* enthält Werte im Intervall $\left[\frac{i}{10}, \frac{i+1}{10}\right)$

Der Algorithmus

- Eingabe: $A[0 \dots n-1]$, mit $0 \leq A[i] < 1$ für alle i
- Hilfsarray: $B[0 \dots k-1]$ der verketteten Listen, jede am Anfang leer

```
import math
n = len(A)
B = k * [ [] ]         # array of k empty lists
for i in range(0,n):
    B[ floor(k*A[i]) ].append( A[i] )
for i in range(0,k):
    B[i].sort()        # irgendein Algo
A = []
for i in range(0,k):
    # append list B[k] to end of A
    A.extend( B[k] )
```


Korrektheit

- Betrachte A_i und A_j mit $A_i \leq A_j$
- Dann gilt $\lfloor k \cdot A_i \rfloor \leq \lfloor k \cdot A_j \rfloor$
- Somit wird A_i zu dem Bucket, in dem A_j ist, oder zu einem mit kleinerem Index hinzugefügt:
  - Dasselbe Bucket → interne Sortierung liefert korrekte Reihenfolge zwischen mit A_i und A_j
  - Ein vorheriger Bucket → nach dem Zusammenfügen der Buckets steht A_i vor A_j

Laufzeit

- Alle Zeilen außer der Bucket-Sortierung benötigen eine Zeitkomplexität von $O(n)$
- Wie wählt man k?
- Intuitiv ist klar: wähle $k=n \rightarrow$ jeder Bucket bekommt eine konstante Anzahl an Elementen, d.h., O(1) viele Elemente
- Folge: man braucht O(1) Zeit, um jedes Bucket zu sortieren $\rightarrow O$(n) für das Sortieren aller Buckets
- Annahme scheint plausibel, aber sorgfältigere Analyse folgt

Radix-Sort

- Vorbild: Sortieranlagen für Briefe entsprechend ihrer Postleitzahl
- Nachteile:
  - Verwendet eine konkrete Zahlen-repräsentation (typ. als Byte-Folge)
  - Verfahren muß in jedem Fall an den konkreten Sortierschlüssel angepasst werden
  - Ist also kein allgemeines Sortierverfahren
- Vorteil: sehr effizient!

- Beobachtung: nutze aus, daß Integers zu beliebiger Basis *r* dargestellt werden können (daher der Name, "radix" = Wurzel)
- Naive (intuitive) Idee:
  - Sortiere alle Daten gemäß erster (höchstwertiger) Ziffer in Bins
  - Sortiere Bin 0 mittels Radix-Sort rekursiv
  - Sortiere Bin 1 rekursiv mittels Radix-Sort, etc. …
- Nennt man *MSD radix sort* (MSD = *most significant digit*)

- Sei im Folgenden der Radix *r* einmal fest gewählt
- Definiere $z(t,a)$ = *t*-te Stelle der Zahl *a* dargestellt zur Basis *r*, t=0 ist niederwertigste Stelle

Der Algorithmus

```
A = array of numbers
i = current digit used for sorting ( 0 <= i <= d-1 )
d = total number of digits (same for all keys)
def msd_radix_sort( A, i, d ):
    # init array of r empty lists = [ [], [], [], … ]
    bin = r * [[]]
    # distribute all A's in bins according to z(i,.)
    for j in range(0, len(A) ):
        bin[ z(i, A[j]) ].append( A[j] )
    # sort bins
    if i >= 0:
        for j in range(0, r):
            msd_radix_sort( bin[j], i-1, d )
    # gather bins
    A = []
    for j in range(0, r):
        A.extend( bin[j] )
        bin[j] = []
```

Beispiel

- Keys = Integers mit 64 Bits
- Arraygröße = 2^{24} (ca. 16 Mio)
- Wir wählen $r = 2^{16}$ (damit das Bins-Array nicht zu groß wird)
- Der Algo checkt also auf dem ersten Rekursionslevel die vorderen 16 Bits und verteilt alle Elemente auf 2^{16} Bins
- Durchschnittliche Arraygröße auf dem zweiten Rekursionslevel = $2^{24} / 2^{16} = 2^8 = 256$
- Radix $r = 2^{16}$ ist für diese kleinen Bins völlig Overkill