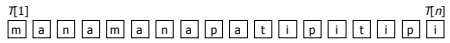
Suche in Texten

- Aufgabe des String-Matching-Algorithmus
  - kinderleicht
- Naïver Algorithmus
  - wie würden Sie es tun?
- Knuth-Morris-Pratt-Algorithmus
  - scharfes Anschauen (= Precomputation) des Musters verbessert die Laufzeit
  - das ist optimal (im worst-case)
- Boyer-Moore-Algorithmus
  - schlechte Zeichen erlauben uns, durch den Text zu springen
  - das ist noch besser als nur optimal (in der Praxis)

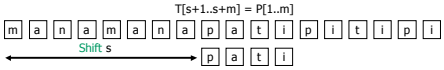
Aufgabe

- Gegeben:
  - Text T der Länge n über einem endlichen Alphabet Σ



  - Muster (Pattern) P der Länge m über selbem Alphabet Σ

- Ausgabe: jedes Vorkommen von P in T



- Definition: als (Mis-)Match wird die (Nicht-)Übereinstimmung von einem Zeichen aus dem Muster mit einem Zeichen im Text bezeichnet

- Beispiel: suche alle Vorkommen des Strings ananas in

anasanamsanamananasnsamansnamsananasamsnamanananasana

anasanamsanamananasnsamansnamsananasamsnamanananasana

14 31 45

Verschiedene Szenarios

- Statische Texte (teilweise schon gemacht)
  - Literaturdatenbanken
  - Bibliothekssysteme
  - Gen-Datenbanken
  - WWW-Verzeichnisse
- Dynamische Texte (im folgenden)
  - Texteditoren
- Zur Verfügung stehende Operationen: seien T, P Strings
  - Länge: length( )
  - i-tes Zeichen: $T[i]$, == (Vergleich 2er Chars)
  - Verkettung: cat(T, P) , $T{\cdot}P$
- Achtung: im folgenden nehmen wir meistens an, daß Indizes ab 1 laufen — Vorsicht bei einer realen Implementierung!

Naïves Verfahren

- für jede mögliche Verschiebung $0 \le i \le n - m$ prüfe maximal m Zeichenpaare, bei Mismatch beginne mit neuer Verschiebung

```
# Input:  Text T und Muster P
# Output: Liste L mit Verschiebungen i,
#         an denen P in T vorkommt
# Bug: Indizierung von T/P beginnt bei 1
def naive_string_match( T, P ):
    L = []
    for s in range( 0, len(T) - len(P) + 1 ):
        j = 1
        while j <= m and T[s+j] == P[j]:
            j += 1
        if j == m + 1:
            L.append( s )
    return L
```


Beispiel

T=„A string consisting of 37 characters.“
P=„sting“

```
A string consisting of 37 characters.
sting
 sting
  sting  …
            sting
             sting
s=14 ------> sting ✓ …
```


Aufwand

- Naiver Algorithmus:
  - benötigt im worst-case die Laufzeit
    $(n - m + 1) \cdot m \in O(n \cdot m)$ falls m « n

0	0	…		0	…	0	…	0	0	…
			s →	0	…	0	…	0	1	

  - für $n = c \cdot m$ ist das $O(n^2)$ bzw. $O(m^2)$
  - in der Praxis oft: Mismatch tritt sehr früh auf → Laufzeit $\sim c \cdot n$
- Untere Schranke für den Worst-Case:
  - mind. 1 Vergleich pro m aufeinander folgende Textstellen, mind. jedes Zeichen des Patterns muß 1x betrachtet werden
    $\rightarrow \Omega\left(m + \frac{n}{m}\right)$

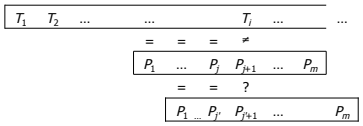
Verfahren nach Knuth-Morris-Pratt (KMP)

- Seien T_i und P_{j+1} die zu vergleichenden Zeichen:

T_1	T_2	…	…		T_i	…	…
=	=	=	≠				
P_1	…	P_j	P_{j+1}	…	P_m		

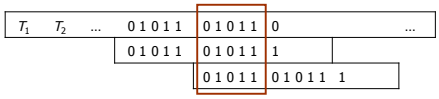
- Tritt bei einer Verschiebung erstmals ein Mismatch auf bei T_i und P_{j+1} dann gilt:
  - die zuletzt verglichenen j Zeichen in T stimmen mit den ersten j Zeichen in P überein
  - $T_i \neq P_{j+1}$

- Methode: bestimme $j' < j$, so daß
  - P[1..j'] = T[i'..i-1] = P[j-j'+1 .. j]
  - T_i anschließend mit $P_{j'+1}$ verglichen werden kann



- M.a.W.: bestimme den
  längsten Präfix von P, der echtes Suffix von P[1..j] ist
- Speichere für jedes j das entsprechende j' in j' = next[j]

- Beispiel für die Bestimmung von next[j]:



- next[j] = Länge des längsten Präfixes von P, das echtes Suffix von P[1..j] ist

- für P = 0101101011 ist next = [0,0,1,2,0,1,2,3,4,5]

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	
0	1	0	1	1	0	1	0	1	1	← Pattern
		0								
		0	1							
					0					
					0	1				
					0	1	0			Suffixe
					0	1	0	1		
					0	1	0	1	1	

Beispiel

- Muster: abrakadabra, next = [0,0,0,1,0,1,0,1,2,3,4]

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	
	a	b	r	a	k	a	d	a	b	r	a	b	r	a	b	a	b	r	a	k	...
	|	|	|	|	|	|	|	|	|	|	|	|	|	|	|	|	|	|	|	|	|	
	a	b	r	a	k	a	d	a	b	r	a	b	r	a	b	a	b	r	a	k	

$j = 11$ $j = 2$

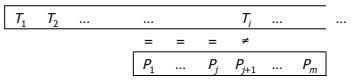
next[11] = 4

Implementierung

```
# Input:  Text T und Muster P
# Output: Liste L mit Verschiebungen s, an denen P in T vorkommt
def kmp_matcher( T, P ):
    n = len(T)
    m = len(P)
    L = []
    next = comp_next( P )
    j = 0
    for i in range(1,n):
        while j > 0 and T[i] != P[j+1] :
            j = next[j]
        if T[i] == P[j+1]:
            j += 1
        if j == m:
            L.append( i-m )
            j = next[j]
    return L
```


Korrektheit

- Situation am Beginn der while-Schleife:
  P[1..j] = T[i-j .. i-1] und $j \neq m$



- falls $j = 0$: j steht vor dem erstem Zeichen von P
- falls j > 0: P kann verschoben werden, solange $j > 0$ und $T_i \neq P_{j+1}$
- ist dann T[i] = P[j+1], können j und i (am Schleifenende) erhöht werden
- wurde ganz P verglichen ($j = m$), ist eine Stelle gefunden, und es kann verschoben werden

Laufzeit

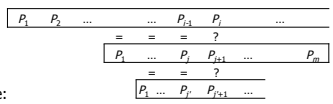
- Beobachtungen:
  - Textzeiger i wird nie zurückgesetzt
  - Textzeiger i und Musterzeiger j werden stets gemeinsam inkrementiert
  - Für alle j ist next[j] < j → j kann, insgesamt über die ganze for-Schleife, nur so oft herab-gesetzt werden, wie es heraufgesetzt wurde

```
for i in range(1,n):
    while j > 0 and \
          T[i] != P[j+1]:
        j = next[j]
    if T[i] == P[j+1]:
        j += 1
    if j == m:
        L.append( i-m )
        j = next[j]
return L
```

- Fazit: der KMP-Algorithmus kann in Zeit $O(n)$ ausgeführt werden, wenn das next-Array bekannt ist.

Berechnung des next-Arrays

- Erinnerung: next[i] = Länge des längsten Präfixes von P, das echtes Suffix von $P_{1..i}$ ist
- Initialisierung: next[1] = 0
- Annahme:
  sei next[i-1] = j:



  - Betrachte zwei Fälle:
    1. $P_i = P_{j+1} \Rightarrow$ next[i] = j + 1
    2. $P_i \neq P_{j+1} \Rightarrow$ versuche nächstkleineren Präfix für $P_{1..i}$, ersetze j durch j'=next[j] , bis $P_i = P_{j+1}$ oder $j = 0$;
       falls $P_i = P_{j+1}$, kann next[i] = j+1 gesetzt werden, sonst ist next[i] = 0
- Fazit: Algo ist sehr ähnlich zum eigentlichen KMP-Algo von vorhin

```
# Input:  Muster P
# Output: next-Array für P
def comp_next( P ):
    m = len( P )
    next = m * [0]
    next[1] = 0
    j = 0
    for i in range( 2, m+1 ):
        while j > 0 and P[i] != P[j+1]:
            j = next[j]
        if P[i] == P[j+1]:
            j += 1
        next[i] = j
    return next
```


Laufzeit von KMP

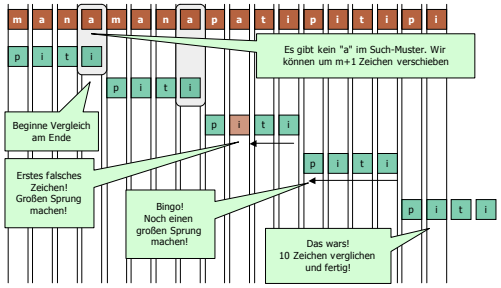
- Satz: Der KMP-Algorithmus kann in Zeit $O(n + m)$ ausgeführt werden.
- M.a.W.: Das String-Matching-Problem kann in Zeit $O(n + m)$ gelöst werden.
- Kann die Textsuche noch schneller sein?
  - "nein" im Worst-Case
  - "ja" im Average-Case

Verfahren nach Boyer-Moore (BM)

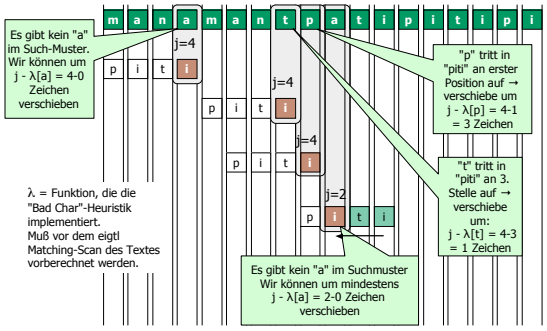
- Gleiche Worst-Case-Laufzeit wie KMP
- Viel bessere Laufzeit in der Praxis
- Basiert auf 2 "Heuristiken"
  - "Bad Character"-Heuristik (Vorkommensheuristik)
  - "Good Suffix"-Heuristik (Match-Heuristik; ähnlich zu KMP)
- Kompletter Algo mit beiden Heuristiken ist etwas knifflig ;-)

Die Idee

- Das Muster von links nach rechts anlegen, aber zeichen-weise von rechts nach links vergleichen



Die "Bad Character"-Heuristik (Vorkommensheuristik)

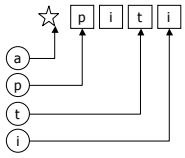


Berechnung der Vorkommensheuristik (Fkt λ)

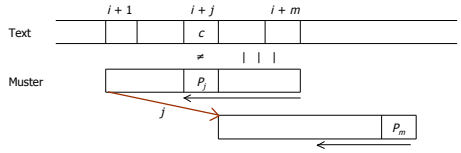
- Für c ∈ Σ und das Muster P definiere

$$\delta(c) := \text{Index des von rechts her ersten Vorkommens von } c \text{ in } P = \begin{cases} 0 & \text{falls } c \notin P \\ \max\{j \mid P[j] = c\} & \text{falls } c \in P \end{cases}$$

```
for a in Σ:
    δ[a] = 0
for j in range( 1, m+1 ):
    δ[ P[j] ] = j
return δ
```

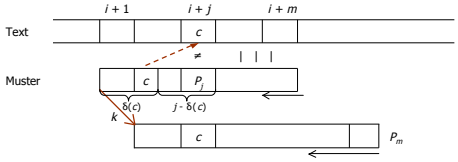


- Im Fogenden seien
  c = das den Mismatch verursachende Zeichen
  j = Index des aktuellen Zeichens im Muster ($c \neq P_j$)
- Fall 1: c kommt nicht im Muster P vor → $\delta(c) = 0$



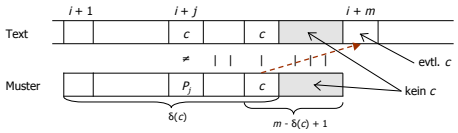
- Fazit: verschiebe das Muster um $j = j - \delta(c)$ Positionen nach rechts

- Fall 2a: c kommt im Muster P vor und $0 < \delta(c) < j$:



- Fazit: verschiebe das Muster soweit nach rechts, daß das "rechteste" c im Muster über einem potentiellen c im Text liegt
- Verschiebung des "rechtesten" c im Muster auf c im Text:
  → Verschiebung um $k = j - \delta(c)$

- Fall 2b: c kommt im Muster P vor und $\delta(c) > j > 0$:



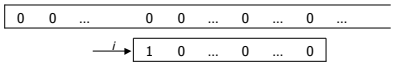
- Fazit: Verschiebung des "rechtesten" c im Muster auf ein potentielles c im Text → Verschiebung um m - $\delta(c)$ + 1

BM-Algorithmus, 1.Version

```
n = len( T )
m = len( P )
berechne δ
i = 0
while i <= n - m:
    j = m
    while j > 0 and P[j] == T[i+j]:
        j -= 1
    if j == 0:
        gib Verschiebung i aus
        i += 1
    else:
        d = δ( T[i+j] )
        if d > j:
            i += m + 1 - d
        else:
            i += j - d
```


Zusammenfassung bis jetzt und Analyse

- Methode
  - vergleiche das Muster von rechts nach links mit dem Text und springe bei Nicht-Übereinstimmung möglichst weit nach rechts
  - Insbesondere: springe um die volle Musterlänge, wenn nicht übereinstimmendes Text-Zeichen nicht im Muster vorkommt
- Laufzeit in der Praxis: $O\left(\frac{n}{m}\right)$
  - insbesondere bei großen Alphabeten und kurzen Mustern
  - typisch bei Textverarbeitungsprogrammen
- Laufzeit im Worst-Case: $O(n \cdot m)$



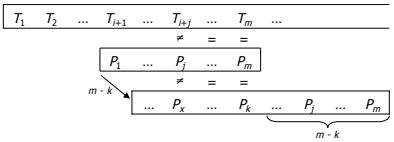
- Gewünschte Laufzeit: $c \cdot \left(m + \frac{n}{m}\right)$

Verbesserungsansatz

- Bisher verwendete Vorkommensheuristik nutzt nicht das Wissen über die bereits besuchten und übereinstimmenden Zeichen
- Kombination mit Match-Heuristik, ähnlich der des KMP-Algorithmus
- Ausnutzen von Selbstähnlichkeit des Musters
- Verhindern der Worst-Case-Laufzeit
- Eigenschaften
  - Worst-Case-Laufzeit mit Vorberechnung: $O(n + m)$
  - durchschnittliche Laufzeit immer noch: $O\left(\frac{n}{m}\right)$

Die "Good Suffix"-Heuristik (Match-Heuristik)

- Nutze die bis zum Auftreten eines Mismatches $P_j \neq T_{i+j}$ gesammelte Information



- Vorberechnung:
  wrw[j] = k := Position, an der das von rechts her nächste Vorkommen des Suffixes $P_{j+1\ldots m}$ endet, dem nicht das Zeichen P_j vorangeht
- Mögliche Verschiebung: $\gamma[j] := m - \text{wrw}[j]$

Beispiel für die wrw-Berechnung

- wrw[j] = Position, an der das von rechts her nächste Vorkommen des Suffixes $P_{j+1\ldots m}$ endet, dem nicht das Zeichen P_j vorangeht
- Muster: banana

j	betracht. Suffix	verbotenes Zeichen	weiteres Auftreten	wrw[j]
6	a	n	banana	2
5	na	a	banana	0
4	ana	n	banana	4
3	nana	a	banana	0
2	anana	b	banana	0
1	banana	ϵ	banana	0

Beispiel für die Anwedung der wrw-Funktion

- wrw["banana"] = [0,0,0,4,0,2]

```
a b a a b a b a n a n a n a n a
          ≠ = = =
      b a n a n a
          b a n a n a
```

- Beobachtung: Fall 2b aus der Version 1 produziert nie eine Verschiebung größer als γ(j) → diesen Fall braucht man nicht mehr auszuprogrammieren

BM-Algorithmus, 2.Version

```
n = len( T )
m = len( P )
berechne δ und γ
i = 0
while i <= n - m:
    j = m
    while j > 0 and P[j] == T[i+j]:
        j -= 1
    if j == 0:
        gib Verschiebung i aus
        i += γ[0]
    else:
        d = j - δ( T[i+j] )
        if d > γ[j]:
            i += d
        else:
            i += γ[j]
```