Beispiel

- Hash-Funktionen: $h(k) = k \bmod 7$
  $h'(k) = 1 + (k \bmod 5)$
- Schlüsselfolge: 15, 22, 1, 29, 26

0	1	2	3	4	5	6
	15					

$h'(22) = 3$

0	1	2	3	4	5	6
	15				22	

$h'(1) = 2$

0	1	2	3	4	5	6
	15				22	1

$h'(29) = 5$

0	1	2	3	4	5	6
	15		29		22	1

$h'(26) = 2$

  - In diesem Beispiel genügen fast immer 1-2 Sondierschritte

Analyse von Double-Hashing

- Satz: Wenn Kollisionen mit Double-Hashing aufgelöst werden, dann ist die durchschnittliche Anzahl von Sondierungsschritten in einer Tabelle der Größe *m* mit $n=\alpha m$ vielen Elementen

$$C_n = \frac{1}{\alpha} \ln\left(\frac{1}{1-\alpha}\right) \quad \text{bzw.} \quad C'_n = \frac{1}{1-\alpha}$$

  für die erfolgreiche bzw. erfolglose Suche.
- Beweis:
  - sehr kompliziert [Guibas & Szemeredi]
  - Idee: Zeige, daß Double-Hashing fast äquivalent zu dem (aufw**e**ndigeren) *Random-Hashing* ist
- Random-Hashing: $s(j,k)$ ist eine Folge von Pseudo-Zufallszahlen, die von *k* abhängt und jeden Slot der Hash-Tabelle gleich wahrscheinlich trifft (mehrfache Hits sind aber möglich)

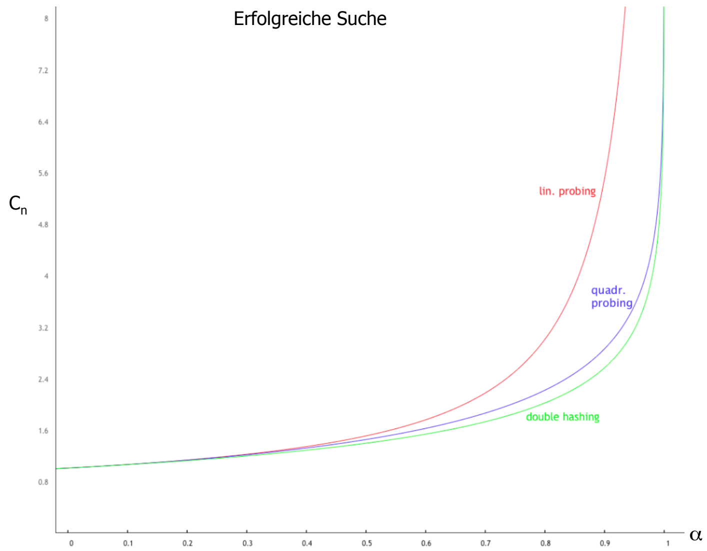
Analyse der mittleren Kosten für *Random-Hashing*

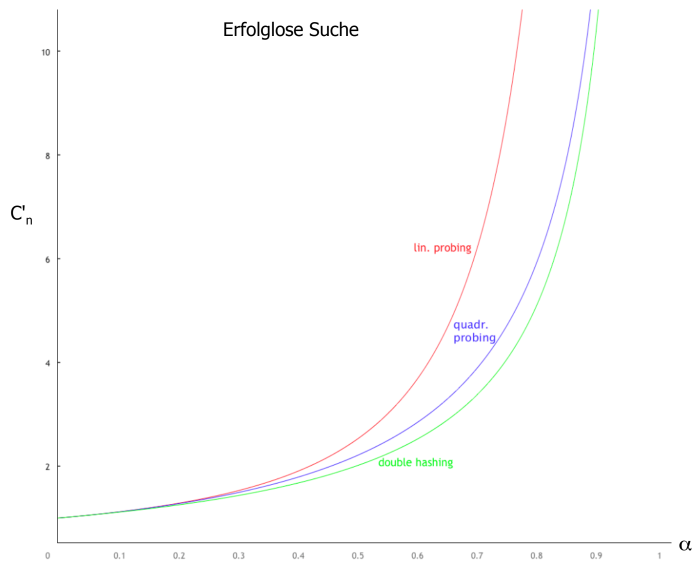
- Definiere ZV X = Anzahl der Sondierungen bei erfolgloser Suche
- Sei $P[X \geq i]$:= Wahrscheinlichkeit, daß eine Suche i oder mehr Sondierungsschritte machen muß, $i = 1, 2, \ldots$
- Klar: $P[X \geq 1] = 1$
- $P[X \geq 2]$ = W'keit, daß erster zufällig untersuchter Slot belegt ist
  $= \frac{n}{m} = \alpha$
- $P[X \geq 3]$ = W'keit, daß erster, zufällig gewählter Slot belegt ist *und* zweiter, zufällig gewählter Slot besetzt ist
  $= \frac{n}{m} \cdot \frac{n}{m} = \alpha^2$

$$
\begin{aligned}
E[X] &= \sum_{i=1}^{\infty} i \cdot P[X = i] \\
&= 1 \cdot P[X = 1] + 2 \cdot P[X = 2] + \cdots \\
&= \; P[X = 1] + \\
&\quad\; P[X = 2] + P[X = 2] + \\
&\quad\; P[X = 3] + P[X = 3] + P[X = 3] + \\
&\quad\; \vdots \quad \longrightarrow \text{Additivität, da Ereignisse unabhängig} \\
&= \; P[X = 1 \vee X = 2 \vee \ldots] + \\
&\qquad\quad P[X = 2 \vee X = 3 \vee \ldots] + \\
&\qquad\qquad\quad P[X = 3 \vee X = 4 \vee \ldots] + \cdots \\
&= P[X \geq 1] + P[X \geq 2] + P[X \geq 3] + \cdots \\
&= 1 + \alpha + \alpha^2 + \cdots = \frac{1}{1 - \alpha}
\end{aligned}
$$

- Fazit:
  - Double-Hashing ist genauso effizient wie randomisiertes Sondieren
  - Double-Hashing ist schneller, um konstanten Faktor (Pseudo-Zufallszahlen sind rel. teuer)

Vergleich





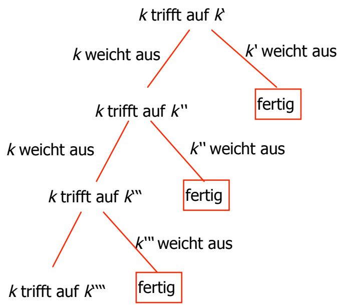
Verbesserung der erfolgreichen Suche

- Allgemein: Kollision beim Einfügen bedeutet
  - k trifft in $T[i]$ auf k_{alt}, d.h. $i = h(k) - s(j,k) = h(k_{\text{alt}}) - s(j', k_{\text{alt}})$
- Problem:
  - Sondierungsfolge $h(k) - s(1,k), h(k) - s(2,k), \ldots$ könnte lang werden
  - dieselbe Folge muß man später bei der Suche nach k wieder durchlaufen
  - evtl. wäre die Folge $h(k_{\text{alt}}) - s(j'+1, k_{\text{alt}}), h(k_{\text{alt}}) - s(j'+2, k_{\text{alt}}), \ldots$ viel schneller auf einen leeren Slot gestoßen
- Idee: suche freien Platz für k oder k_{alt}
- 2 Möglichkeiten:
  - (M1) k_{alt} bleibt in $T[i]$: betrachte neue Position $h(k) - s(j+1, k)$ für k
  - (M2) k verdrängt k_{alt}: betrachte neue Position $h(k_{\text{alt}}) - s(j'+1, k_{\text{alt}})$ für k_{alt}
  - solange (M1) und (M2) auf belegten Slot stoßen, verfolge (M1) oder (M2) weiter

Brent's Verfahren

- Verfolge (M2) = Verdrängung nur 1x, sonst (M1)
- Annahme: Double-Hashing, d.h., wenn man in Sondierungsfolge bei Slot i steht, ist der nächste Slot (in der Sondierungsfolge) bei $i - h'(k)$ mod m

```
i = h( k )
while T[i] belegt:
    k_alt = T[i]
    i1 = (i-h'(k)) % m
    i2 = (i-h'(k_alt)) % m
    if T[b1] belegt and T[b2] frei:
        # verdränge k_alt
        T[i] = k
        k = k_alt
        i = i2
    else:
        # leave k_alt in its slot
        i = i1
T[i] = k
```



- Analyse (o.Bew.):
  - Kosten für erfolglose Suche bleiben unverändert:

$$C'_n \approx \frac{1}{1-\alpha}$$

  - Kosten für erfolgreiche Suche im Schnitt:

$$C_n \approx 1 + \frac{\alpha}{2} + \frac{\alpha^3}{4} + \frac{\alpha^4}{15} + \cdots \quad < 2.5$$

Beispiel

- Hash-Funktionen: $h(k) = k \bmod 7$
  $h'(k) = 1 + (k \bmod 5)$
- Schlüsselfolge: 12, 53, 5, 15, 2, 15

0	1	2	3	4	5	6
				53	12	

$h(5) = 5 \rightarrow$ belegt $\rightarrow k' = 12$

- Betrachte:
  $5 - h'(k) = 5 - h'(5) \quad = 4$ belegt
  und $5 - h'(k') = 5 - h'(12) = 3$ frei
  $\rightarrow$ 5 verdrängt 12 von seinem Platz