Voronoi-Diagramme & Delaunay-Triangulierung

Generelle Idee: gegeben eine Menge Objekte im Raum (z.B. Pkte); jedes Objekt übt einen "Einfluß" auf alle Pkte im Raum aus, abhängig von der Distanz; wie sieht das Gebiet des Raumes aus, in dem ein Objekt den größten Einfluß hat? wie sehen alle diese Gebiete für alle Objekte "im Ensemble" aus?
Dieses Konzept ist so allgemein und kommt in unterschiedlicher Form in so vielen Bereichen vor, daß es auch sehr viele versch. Namen dafür gibt:
Voronoi-Diagramme (hat sich durchgesetzt), Dirichlet-Tesselierung, Thiessen-Zone (Kartographie / Geographie), Wigner-Seitz-Regionen (Chemie / Kristallographie)

Beispiel-Fragestellung:
gegeben eine Supermarkt-Kette mit einigen Filialen verteilt im Land. Nun soll eine weitere Filiale eröffnet werden.
Frage: wo muß diese plaziert werden, damit sie den größtmöglichen Einzugsbereich hat?
Nächste Frage: wie groß ist nun der Einzugsbereich jeder der ~~aller~~ Filialen? (von einigen alten Filialen wird ja durch die neue etwas "weggenommen"); Hintergrund: ist eine der Filialen evtl nicht mehr profitabel (Ann.: Profit ~ Fläche des Einzugsgebietes)
Nächste Frage: wie muß man alle Filialen verschieben, so daß alle ungefähr ein gleich großes Einzugsgebiet haben? (→ CVD = centroidal voronoi diagram)

Bezeichnung:

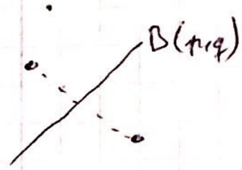
1. $d(p,q) = \| p - q \|$; (jede andere Metrik geht auch!) [R. Klein, Kap 5]
2. $\overline{R}$ = Abschluß (closure) einer offenen Region $R \subseteq \mathbb{R}^d$.

Definition:

Gegeben zwei Pkte p, q.

Der Bisektor zwischen p und q ist

$$B(p,q) := \{ x \mid d(x,p) = d(x,q) \}$$



Offensichtlich ist $B(p,q)$ genau die Mittelsenkrechte auf $\overline{pq}$.

Der Bisektor zerlegt den Raum in 2 offene Halbräume

$$H(p,q) := \{ x \mid d(x,p) < d(x,q) \}$$
$$H(q,p) := \{ x \mid d(x,q) < d(x,p) \}$$

Definition:

Gegeben eine Menge Pkte S.

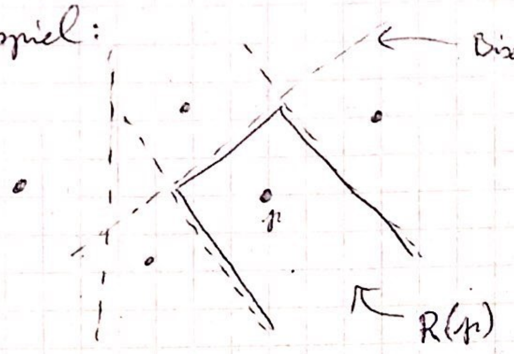
Sei $p \in S$; dann ist die "Voronoi-Region von p bzgl. S"

$$R(p) := \bigcap_{p_i \in S \setminus \{p\}} H(p, p_i) .$$

Das "Voronoi-Diagramm von S" ist definiert als

$$V(S) := \bigcup_{\substack{p,q \in S \\ p \neq q}} \overline{R(p)} \cap \overline{R(q)}$$

Beispiel:

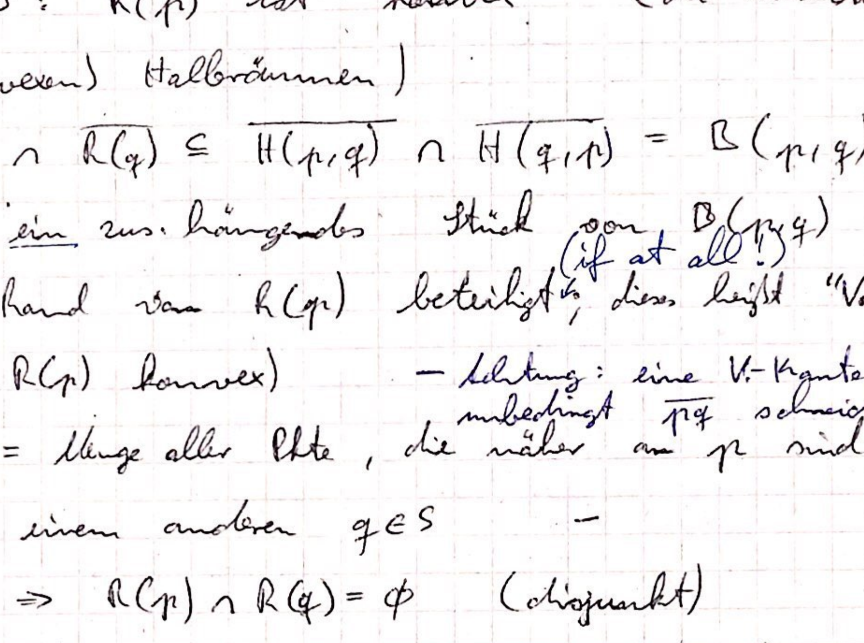


Diese R Region ist ~~offen~~ unbounded

Einfache Eigenschaften der Voronoi-Regionen:

- $\forall p \in S$: $R(p)$ ist konvex (der Schnitt von (konvexen) Halbräumen)
- $\overline{R(p)} \cap \overline{R(q)} \subseteq \overline{H(p,q)} \cap \overline{H(q,p)} = B(p,q)$
- Nur ein zus. hängendes Stück von $B(p,q)$ ist (if at all!) am Rand von $R(q)$ beteiligt, dies heißt "Voronoi-Kante" (da $R(p)$ konvex) – Achtung: eine V.-Kante muß nicht unbedingt $\overline{pq}$ schneiden!
- $R(p)$ = Menge aller Pkte, die näher an p sind als an irgend einem anderen $q \in S$
- $p \neq q \Rightarrow R(p) \cap R(q) = \emptyset$ (disjunkt)

Beispiel für Voronoi-Diagramm:



Bem.: das VD ist eigtl nur der Graph der V.-Knoten und -Kanten. Meist meint man aber eigtl. die Menge $\{R(p_i)\}$.

Der Satz vom sich ausdehnenden (expandierenden) Kreis (2D-Version)

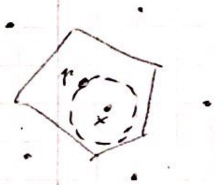
let S = set of pts.

Sei x ein (any (!)) Pkt, und $C(x)$ ein Kreis ~~(Kugel)~~ um x, der sich langsam ausdehnt. Dann trifft $C(x)$ irgendwann zum ersten Mal auf einen oder mehrere Pkte aus S.

Es gibt 3 Fälle:

1. C trifft auf genau 1 Pkt $p \in S \Leftrightarrow x \in R(p)$
2. —"— 2 Pkte $p,q \in S \Leftrightarrow x \in$ Voronoi-Kante zwischen $R(p)$ und $R(q)$
3. C trifft auf 3 oder mehr Pkte $p_1, \dots, p_k \Leftrightarrow$ x ist ein Voronoi-Knoten zwischen den Regionen $R(p_i)$ (at most 3, if S in general position)

Bew.:



Fall 1 $\Rightarrow d(x,p) = \min_{p_i \in S} d(x,p_i) \overset{\text{erst } \Leftarrow}{\Leftrightarrow} x \in R(p)$

Fall 2 $\Rightarrow x \in B(p,q) \subseteq \overline{H(p,q)} \quad \wedge$

$\forall r \neq p,q: \quad x \in \overline{H(p,r)} \quad \Rightarrow$

$x \in \bigcap_{r \neq p} \overline{H(p,r)} \underset{(*)}{=} \overline{\bigcap_{r \neq p} H(p,r)} = \overline{R_S(p)}$

analog folgt $x \in \overline{R(q)} \Rightarrow x \in \overline{R(q)} \cap \overline{R(p)}$

*) Normalerweise würde hier nur "$\supseteq$" gelten; weil aber alle $\overline{H(p,r)}$ den Pkt p enthalten gilt hier auch „$\subseteq$". [s. Klein S. 21

Fall 3 $\Rightarrow \forall i = 1..k: \quad d(x,p_i) = r = \min_{q \in S} d(x,q) \quad \Rightarrow$

$\forall i,j \in \{1..k\}: \quad x \in B(p_i,p_j) \Rightarrow$ Voronoi-Knoten

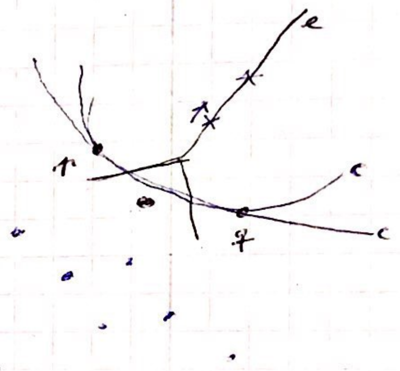
Das Voronoi-Diagramm ist also eine Klassifizierung aller Pkte in Äquivalenzklassen.

Umformulierung des Satzes vom expandierenden Kreis:
Ein Pkt x liegt auf einer V.-Kante gdw.
es einen Kreis $C(x)$ gibt, der genau 2 Pkte aus S
berührt und sonst keinen weiteren Pkt aus S enthält.
Ein Pkt x ist ein V.-Knoten gdw. es einen Kreis $C(x)$
gibt, der genau (3 oder mehr) 3 Pkte aus S berührt und sonst
keinen weiteren Pkt aus S enthält.

Globale Eigenschaften von V(S)

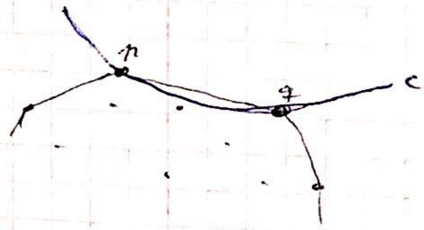
Lemma (Zus.hang zwischen V(S) und CH(S)):

R(p) ist unbeschränkt $\Leftrightarrow$ p liegt auf dem Rand von CH(S).



Bew.:

R(p) unbeschränkt $\Rightarrow$ R(p) hat unbeschr. V-Kante e;
sei q die V-Site, so daß e "zwischen" p und q;
betrachte Kreis C(x) durch p und q und x auf e;
lasse $x \to \infty$ wandern $\Rightarrow$ das Stück (circle segment between p, q) von C(x) zwischen p und q
nähert sich einer geraden Strecke an (approaches the line segment $\overline{pq}$), C(x) enthält aber weiterhin keinen Pkt aus S $\Rightarrow$ Def einer Kante der CH.
Seien p, q $\in$ CH(S) benachbarte Ecken $\Rightarrow$ ex Kreis C(x) durch p, q, der keinen weiteren Pkt aus S enthält, da S endlich*;
diesen kann man auch wieder immer größer machen $\Rightarrow$ Beh.



*) und alle Pkte in S in allg. Lage :)

Lemma:

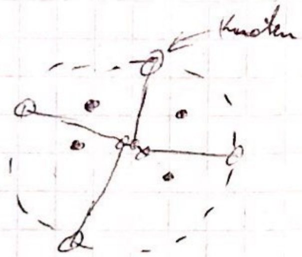
V(S) ist immer ein zus.hängender Graph, außer alle Pkte in S liegen auf einer Geraden.

Satz (Komplexität des Voronoi-Diagramms):
Das V.-Diagramm über n Pkte in der Ebene hat $O(n)$ viele Knoten, Kanten, und Regionen.

Beweis:
Lege einen "sehr weit" entfernten Weg um das VD. Dadurch werden die unendlichen Kanten zu endlichen, und man hat genau eine Facette mehr. ~~Bette den~~ Graphen in 3D als einfachen Polyeder ein → Eulerformel (s. Kap. Konvexe Hülle)

$V - E + F = 1$ (ohne die äußere Facette)

→ weiter wie in CG2 „oder Section "Konvexe Hülle in 3D"



Satz (Komplexität):
Die Konstruktion von $V(S)$ in der Ebene benötigt Zeit $\Omega(n \log n)$.

Beweis:
Reduktion der CH auf $V(S)$.
Man kann in Zeit $O(n)$ aus $V(S)$ die $CH(S)$ ablesen.