Einführung in die Matrizenrechnung

für Studenten mit dem Wahlfach Statistik

Stefan Lang
Institut für empirische Wirtschaftsforschung
Universität Leipzig
email: lang@wifa.uni-leipzig.de

14. April 2005

Inhaltsverzeichnis

1

Einführung

1.1 Vektoren im $\mathbb{R}^n$

In der Statistik (und in vielen anderen Wissenschaften) ist es häufig zweckmäßig eine Menge von (reellen) Zahlen $x_1, \ldots, x_n$, zu einem geordneten n–Tupel

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \tag{1.1}$$

zusammenzufassen. Beispielsweise könnte es sich bei den Zahlen $x_1, \ldots, x_n$ um eine Stichprobe von n Personen aus einer größeren Grundgesamtheit handeln und bei den Werten x_i, $i = 1, \ldots, n$, um die gemessene Körpergröße, das Gewicht, Einkommen etc. der i–ten Person. Wir bezeichnen geordnete n–Tupel der Form (1.1) als Vektoren im $\mathbb{R}^n$.

Definition 1.1
Die Menge aller n–Tupel

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

reeller Zahlen $x_1, \ldots, x_n$ wird n–dimensionaler Vektorraum über $\mathbb{R}$, kurz $\mathbb{R}^n$ genannt. Die Zahlen $x_1, \ldots, x_n$ heißen auch Skalare. Wir definieren für Vektoren $x \in \mathbb{R}^n, y \in \mathbb{R}^n$ und dem Skalar $\lambda \in \mathbb{R}$ folgende Operationen:

(i) (Vektoraddition)

$$x + y = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + y_1 \\ x_2 + y_2 \\ \vdots \\ x_n + y_n \end{pmatrix}$$

(ii) (Multiplikation mit einem Skalar)

$$\lambda \cdot x = \lambda \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda \cdot x_1 \\ \lambda \cdot x_2 \\ \vdots \\ \lambda \cdot x_n \end{pmatrix}$$

Den Nullvektor

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

bezeichnen wir im Folgenden mit $\mathbf{0}$ *und den Einsvektor*

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$$

mit $\mathbf{1}$.

Vektoren im $\mathbb{R}^2$ und die Vektoraddition bzw. Multiplikation mit einem Skalar können geometrisch veranschaulicht werden. Wir können den Vektor $x = (x_1, x_2)$ in einem kartesischen Koordinatensystem als Pfeil vom Ursprung (Punkt $(0, 0)$) zu den Koordinaten (x_1, x_2) darstellen (Abbildung 1.1). Die Addition zweier Vektoren $x = (x_1, x_2)$ und $y = (y_1, y_2)$ ergibt sich als die Diagonale des von x und y aufgespannten Parallelogramms (Abbildung 1.2). Das Produkt eines Vektors $x = (x_1, x_2)$ mit einem Skalar $\lambda \in \mathbb{R}$ bedeutet eine Streckung (falls $|\lambda| > 1$) bzw. Stauchung ($|\lambda| < 1$) des Vektors x. Falls $\lambda > 0$ bleibt die Richtung erhalten, im Falle $\lambda < 0$ ändert sich die Richtung des Vektors (Abbildung 1.3).

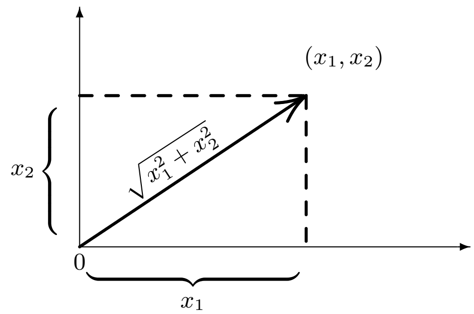

Abbildung 1.1. Geometrische Veranschaulichung eines Vektors im $\mathbb{R}^2$.

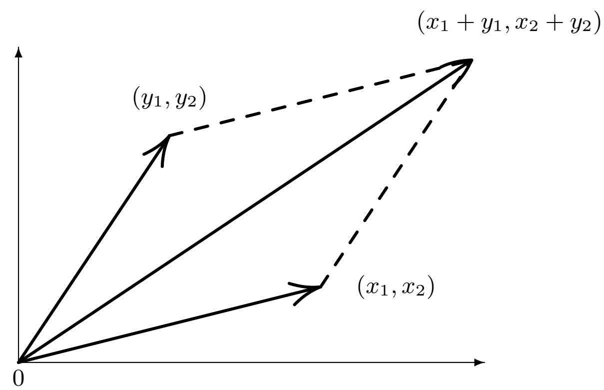

Abbildung 1.2. Geometrische Veranschaulichung der Vektoraddition im $\mathbb{R}^2$.

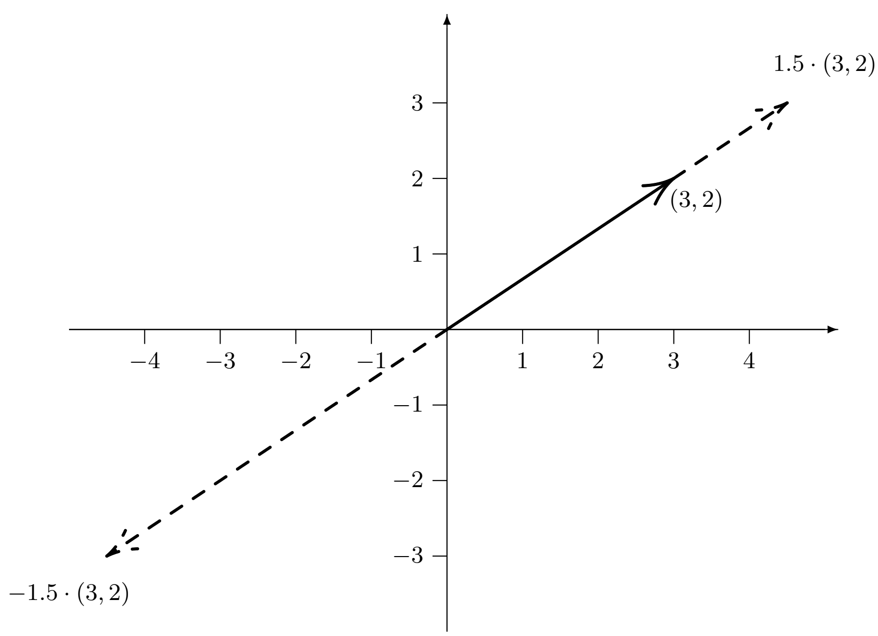

Abbildung 1.3. Veranschaulichung der Multiplikation mit einem Skalar

Für Vektoren in $\mathbb{R}^n$ gelten folgende einfache Rechenregeln:

Satz 1.1 (Rechenregeln für Vektoren im $\mathbb{R}^n$)
Für beliebige Vektoren $x, y, z \in \mathbb{R}^n$ und Skalare $\lambda, \mu \in \mathbb{R}^n$ gilt:

1. *Assoziativgesetz für die Addition:* $x + (y + z) = (x + y) + z$
2. *Kommutativgesetz:* $x + y = y + x$
3. $x + \mathbf{0} = x$
4. $x + (-x) = \mathbf{0}$
5. *Distributivgesetze für die skalare Multiplikation:* $(\lambda + \mu)x = \lambda x + \mu x$ *bzw.* $\lambda(x + y) = \lambda x + \lambda y$
6. *Assoziativgesetz für die skalare Multiplikation:* $(\lambda\mu)x = \lambda(\mu x)$
7. $1 \cdot x = x$

Definition 1.2 (Skalarprodukt)
Das Skalarprodukt oder inneres Produkt $\langle x, y\rangle$ der Vektoren $x, y \in \mathbb{R}^n$ ist definiert als

$$\langle x, y\rangle = x_1 \cdot y_1 + x_2 \cdot y_2 + \cdots + x_n \cdot y_n.$$

Zwei Vektoren heißen orthogonal, wenn

$$\langle x, y\rangle = 0$$

gilt.

Im $\mathbb{R}^2$ läßt sich die Orthogonalität zweier Vektoren wieder geometrisch veranschaulichen. Sind nämlich zwei Vektoren zueinander orthogonal, so stehen sie senkrecht aufeinander (Abbildung 1.4).

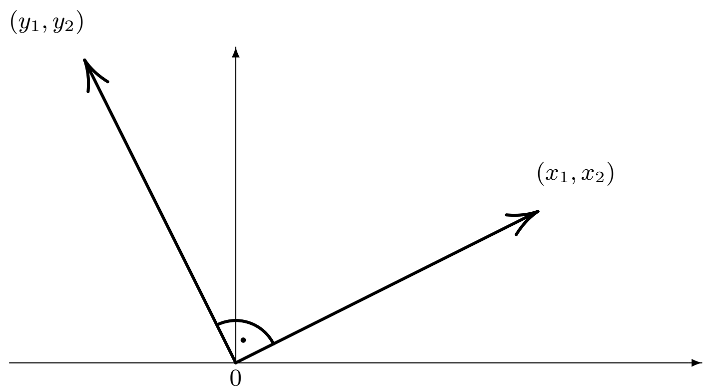

Abbildung 1.4. Beispiel für zwei Vektoren x und y mit $\langle x, y\rangle = 0$.

Beispiel 1.1
Wir betrachten die Vektoren $x = (1, 2, 3)$, $y = (2, -1, 2)$ und $z = (-1, 0, \frac{1}{3})$ des $\mathbb{R}^3$. Es gilt

$$\langle x, y\rangle = 1 \cdot 2 + 2 \cdot (-1) + 3 \cdot 2 = 6$$

und

$$\langle x, z\rangle = 1 \cdot (-1) + 2 \cdot 0 + 3 \cdot \frac{1}{3} = 0.$$

Die Vektoren x und z sind also zueinander orthogonal.

$\triangle$

Bemerkung:
Der Raum $\mathbb{R}^n$ versehen mit der Vektoraddition, der skalaren Multiplikation und dem Skalarprodukt heißt euklidischer Raum.

Definition 1.3 (Abstand und Länge)
Gegeben seien die Vektoren x und y im $\mathbb{R}^n$. Der (euklidische) Abstand $d(x, y)$ zwischen den Punkten x und y ist definiert als

$$\begin{aligned} d(x, y) &= \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 + \cdots + (x_n - y_n)^2} \\ &= \sqrt{\langle x - y, x - y\rangle}. \end{aligned}$$

Die (euklidische) Länge $\|x\|$ eines Vektors $x \in \mathbb{R}^n$ ist definiert als

$$\|x\| = \sqrt{x_1^2 + \cdots + x_n^2} = \sqrt{\langle x, x\rangle}.$$

Der Abstand zweier Vektoren x und y im $\mathbb{R}^2$ ist in Abbildung 1.5 veranschaulicht. Die Länge eines Vektors x im $\mathbb{R}^2$ ist in Abbildung 1.6 geometrisch veranschaulicht.

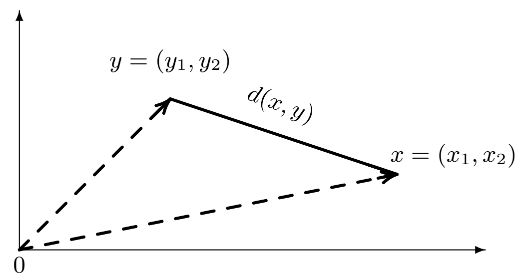

Abbildung 1.5. Veranschaulichung des euklidischen Abstands zwischen zwei Vektoren x und y im $\mathbb{R}^2$

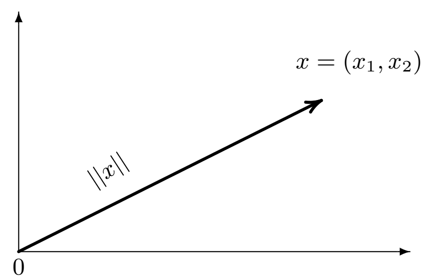

Abbildung 1.6. Veranschaulichung der Länge $||x||$ eines Vektors x im $\mathbb{R}^2$.

1.2 Reelle Matrizen

In der Statistik interessiert man sich in der Regel nicht nur für ein Merkmal einer Person oder Untersuchungsseinheit, sondern gleichzeitig für mehrere Merkmale (etwa das Alter, das Gewicht, usw. einer Person). In diesem Fall erweist es sich als zweckmäßig die Merkmalsausprägungen in einem geordneten rechteckigen Schema anzuordnen. Dieses Schema besteht dann aus m = *Anzahl der Untersuchungsseinheiten* Zeilen und n = *Anzahl der untersuchten Merkmale* Spalten. Dies führt zu folgender Definition:

Definition 1.4 (reelle Matrix)
Ein nach m Zeilen und n Spalten geordnetes Schema $\mathbf{A}$ von mn Elementen $a_{ij} \in \mathbb{R}$

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

heißt reelle Matrix von der Ordnung $m \times n$ oder kurz $m \times n$ Matrix. Kurzschreibweise: $\mathbf{A} = (a_{ij}), i = 1, \ldots, m, j = 1, \ldots, n.$
Die Zeilen von $\mathbf{A}$ können dabei als Vektoren des $\mathbb{R}^n$ (sog. Zeilenvektoren) und die Spalten

als Vektoren des $\mathbb{R}^m$ *(sog. Spaltenvektoren) angesehen werden. Dabei wird der* j*–te Zeilenvektor von* $\mathbf{A}$ *mit* $a^j = (a_{j1}, \ldots, a_{jn})$ *und der* j*–te Spaltenvektor mit* $a_j = (a_{1j}, \ldots, a_{nj})'$ *bezeichnet. Zwei* $m \times n$ *Matrizen* $\mathbf{A} = (a_{ij})$ *und* $\mathbf{B} = (b_{ij})$ *sind genau dann gleich, wenn für alle* i, j *gilt:* $a_{ij} = b_{ij}$.

Beispiel 1.2

Nach dem Gesetz zur Regelung der Miethöhe kann der Vermieter die Zustimmung zu einer Erhöhung des Mietzinses verlangen, wenn „der Mietzins die üblichen Entgelte nicht übersteigt, die in der Gemeinde für nicht preisgebundenen Wohnraum vergleichbarer Art, Größe, Ausstattung, Beschaffenheit und Lage in den letzten vier Jahren vereinbart oder Erhöhungen geändert worden sind“.

Zur Feststellung der „üblichen Entgelte“ erstellen die meisten Städte und viele Gemeinden sogenannte Mietspiegel. Diese ermöglichen die Berechnung der „durchschnittlichen“ Miete, die pro Quadratmeter und Monat für eine Wohnung mit einer bestimmten Wohnfläche (in Quadratmeter), einem Baualter (in Jahren) und Merkmalen, welche die Ausstattung der Wohnung, den Haustyp und die Lage der Wohnung, den Haustyp und die Lage der Wohnunge in der Gemeinde charakterisieren, bezahlt wird.

Da in größeren Städten wie München eine Erfassung aller Mietpreise schon aus Zeit– und Kostengründen nicht möglich ist, werden Daten zu Miethöhen und zugehörigen Merkmalen über eine repräsentative Stichprobe gesammelt.

Folgende Merkmale werden unter anderen erhoben:

Y	Nettomiete der Wohnung
X_1	Wohnflächen
X_2	Baualter
X_4	gehobene Küchenausstattung (1 = ja, 0 = nein)
X_5	gehobener Neubau (1 = ja, 0 = nein)
X_3	geographische Lage

Die erhobenen Merkmale werden zweckmäßigerweise in einer Matrix $\mathbf{A}$ abgelegt, deren erste zehn Zeilen folgende Gestalt besitzt:

235.9	35	39	0	0	1112
852.1	104	39	0	0	1112
693.7	29	71	0	0	2114
551.7	39	72	0	0	2148
1574.1	97	85	0	0	2222
941.5	62	62	0	0	2222
631.2	31	65	0	0	2211
723.4	61	57.5	0	0	2142
728.7	72	78	0	0	2143
1017.3	75	68	0	0	2142

In der ersten Spalte dieser Matrix sind die beobachteten Nettomieten zu finden, in der zweiten Spalte die Wohnfläche usw. Die Zeilen der Matrix beinhalten jeweils die erhobenen Merkmalsausprägungen einer bestimmten Wohnung. Die 1. Zeile besagt beispielsweise, dass die erste Wohnung eine Nettomiete von 235.9 DM, eine Wohnfläche von 35 qm usw. besitzt.

△

Definition 1.5 (transponierte Matrix)

Sei $\mathbf{A} = (a_{ij})$ *eine* $m \times n$ *Matrix. Dann ist die transponierte Matrix* $\mathbf{A}'$ *definiert als diejenige Matrix, die man durch das Vertauschen der Zeilen und Spalten von* $\mathbf{A}$ *erhält, d.h.*

$$\mathbf{A}' = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{m1} \\ \vdots & & & \vdots \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Sie ist also von der Ordnung $n \times m$.

Beispiel 1.3

Betrachte die 3×4 Matrix

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 1 & 6 \\ 1 & 0 & 3 & 2 \\ 9 & 3 & 4 & 3 \end{pmatrix}.$$

Die transponierte von $\mathbf{A}$ ist gegeben durch die 4×3 Matrix

$$\mathbf{A}' = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 9 \\ 4 & 0 & 3 \\ 1 & 3 & 4 \\ 6 & 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

△

Wir definieren im Folgenden noch einige spezielle Matrizen, die immer wieder auftauchen werden.

Definition 1.6 (quadratische Matrix)

Eine Matrix $\mathbf{A}$ *heißt quadratisch, falls sie von der Ordnung* $n \times n$ *ist. Die Diagonale, welche aus den Elementen* $a_{11}, \ldots, a_{nn}$ *besteht, heißt Hauptdiagonale.*

Eine wichtige quadratische Matrix ist die sogenannte *Einheitsmatrix* $\mathbf{I}_n$, deren Einträge auf der Hauptdiagonalen sämtlich gleich Eins und ober bzw. unterhalb der Hauptdiagonalen Null sind, d.h.

$$\mathbf{I}_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & 1 \end{pmatrix}.$$

Weitere spezielle quadratische Matrizen werden in den folgenden Definitionen angegeben:

Definition 1.7 (Diagonalmatrix)
Eine quadratische Matrix $\mathbf{D}$ *heißt* Diagonalmatrix*, wenn ihre Einträge unter– und oberhalb der Hauptdiagonalen Null sind.* $\mathbf{D}$ *hat also folgende Gestalt:*

$$\mathbf{D} = \begin{pmatrix} d_1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & d_n \end{pmatrix}$$

Schreibweise: $\mathbf{D} = diag(d_1, \dots, d_n)$

Um eine spezielle Diagonalmatrix handelt es sich beispielsweise bei der Einheitsmatrix.

Definition 1.8 (symmetrische Matrix)
Eine quadratische Matrix $\mathbf{A}$ *heißt symmetrisch, wenn gilt:* $\mathbf{A} = \mathbf{A}'$.

Offenbar ist jede Diagonalmatrix, also auch die Einheitsmatrix, eine symmetrische Matrix.

Beispiel 1.4
Ein Beispiel für eine symmetrische Matrix ist gegeben durch

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 & 8 \\ 3 & 2 & 7 & 5 \\ 1 & 7 & 6 & 6 \\ 8 & 5 & 6 & 0 \end{pmatrix}.$$

$\triangle$

Wir definieren jetzt ähnlich wie für Vektoren des $\mathbb{R}^n$ die Addition zweiter Matrizen und die skalare Multiplikation eines Skalars mit einer Matrix.

Definition 1.9 (Summe und skalare Multiplikation von Matrizen)
Die Summe $\mathbf{A}+\mathbf{B}$ zweier $m \times n$ Matrizen $\mathbf{A}=(a_{ij})$ und $\mathbf{B}=(b_{ij})$ ist definiert als:

$$\mathbf{A}+\mathbf{B} := (a_{ij}+b_{ij}).$$

Die Multiplikation von $\mathbf{A}$ mit einem Skalar $\lambda \in \mathbb{R}$ ist definiert als

$$\lambda\mathbf{A} := (\lambda a_{ij}).$$

Beispiel 1.5
Betrachte die Matrizen

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 5 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 3 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & -4 \end{pmatrix}.$$

Dann gilt für die Summe von $\mathbf{A}$ und $\mathbf{B}$:

$$\mathbf{A}+\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1+1 & 2+4 & 3+2 \\ 3+3 & 5+1 & 2+0 \\ 1-1 & 2+2 & 2-4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 6 & 5 \\ 6 & 6 & 2 \\ 0 & 4 & -2 \end{pmatrix}.$$

$\triangle$

Wir stellen im Folgenden einige fundamentale Rechenregeln für Matrizen zusammen.

Satz 1.2 (Rechenregeln)
Für beliebige $m \times n$ Matrizen $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}$ und beliebige Skalare $r, k \in \mathbb{R}$ gilt:

1. *Assoziativgesetz für die Addition:* $\mathbf{A}+(\mathbf{B}+\mathbf{C}) = (\mathbf{A}+\mathbf{B})+\mathbf{C}$
2. *Kommutativgesetz:* $\mathbf{A}+\mathbf{B} = \mathbf{B}+\mathbf{A}$
3. $\mathbf{A}+\mathbf{0} = \mathbf{A}$, *wobei die Nullmatrix $\mathbf{0}$ diejenige Matrix ist, deren sämtliche Einträge gleich Null sind.*
4. $\mathbf{A}+(-\mathbf{A}) = \mathbf{0}$
5. *Distributivgesetze für die skalare Multiplikation:* $(k+r)\mathbf{A} = k\mathbf{A}+r\mathbf{A}$ *bzw.* $k(\mathbf{A}+\mathbf{B}) = k\mathbf{A}+k\mathbf{B}$

6. *Assoziativgesetz für die skalare Multiplikation:* $(kr)\mathbf{A} = k(r\mathbf{A})$

7. $1 \cdot \mathbf{A} = \mathbf{A}$

8. $0 \cdot \mathbf{A} = \mathbf{0}$.

9. $(k\mathbf{A})' = k\mathbf{A}'$

10. $(\mathbf{A} + \mathbf{B})' = \mathbf{A}' + \mathbf{B}'$

1.3 Matrixmultiplikation

Definition 1.10 (Matrixmultiplikation)
Das Produkt der $m \times n$ Matrix $\mathbf{A} = (a_{ij})$ mit der $n \times p$ Matrix $\mathbf{B} = (b_{ij})$ ist die $m \times p$ Matrix

$$\mathbf{AB} = \mathbf{C} = (c_{ik}) \qquad \textit{mit} \qquad c_{ik} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} b_{jk}.$$

Ausführlich erhalten wir demnach

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = \begin{pmatrix} \sum\limits_{j=1}^{n} a_{1j} b_{j1} & \sum\limits_{j=1}^{n} a_{1j} b_{j2} & \cdots & \sum\limits_{j=1}^{n} a_{1j} b_{jp} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \sum\limits_{j=1}^{n} a_{mj} b_{j1} & \sum\limits_{j=1}^{n} a_{mj} b_{j2} & \cdots & \sum\limits_{j=1}^{n} a_{mj} b_{jp} \end{pmatrix}.$$

Beispiel 1.6
Betrachte die Matrizen

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Dann erhalten wir für das Produkt

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = \begin{pmatrix} -1 \cdot 1 + 2 \cdot 1 & 1 \cdot 2 + 2 \cdot 2 \\ -1 \cdot 3 + 4 \cdot 1 & 3 \cdot 2 + 4 \cdot 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 6 \\ 1 & 14 \end{pmatrix}.$$

Man beachte, dass die Matrixmultiplikation nicht kommutativ ist, d.h.

$$\mathbf{B} \cdot \mathbf{A} = \begin{pmatrix} -1 \cdot 1 + 2 \cdot 3 & -1 \cdot 2 + 2 \cdot 4 \\ 1 \cdot 1 + 2 \cdot 3 & 1 \cdot 2 + 2 \cdot 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 10 \end{pmatrix} \neq \mathbf{A} \cdot \mathbf{B}.$$

△

Beispiel 1.7
Falls $a \in \mathbb{R}$ und $b \in \mathbb{R}$ zwei Skalare sind, ist bekannt, dass

$$a \cdot b = 0$$

genau dann gilt, wenn entweder $a = 0$ oder $b = 0$ ist. Wir zeigen im Folgenden in einem Gegenbeispiel dass für Matrixprodukte aus

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = \mathbf{0}$$

keineswegs folgt, dass $\mathbf{A}$ oder $\mathbf{B}$ Nullmatrizen sein müssen. Wir betrachten dazu die Matrizen

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 16 \\ 1 & -3 & -7 \\ -2 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

und

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} -2 & -4 & -8 \\ -3 & -6 & -12 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}.$$

Für das Produkt $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}$ erhalten wir

$$\begin{pmatrix} 2 & 4 & 16 \\ 1 & -3 & -7 \\ -2 & 2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & -4 & -8 \\ -3 & -6 & -12 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Das Produkt der beiden Matrizen ist also die Nullmatrix, obwohl es sich bei keinem der beiden Faktoren um die Nullmatrix handelt.

△

Beispiel 1.8

Mit Hilfe der Matrixmultiplikation lassen sich auch einige Summen darstellen. Seien $x, y \in \mathbb{R}^n$ und sei $\mathbf{1}$ der $n \times 1$ Einsvektor, dessen Einträge sämtlich aus Einsen bestehen. Dann gilt:

1. $\sum_{i=1}^{n} x_i = \mathbf{1}'x = x'\mathbf{1}$
2. $\sum_{i=1}^{n} x_i y_i = x'y = y'x$
3. $\sum_{i=1}^{n} x_i^2 = x'x$

Damit lassen sich das arithmetische Mittel $\bar{x}$ und die Varianz s^2 der Zahlen $x = (x_1, x_2, \cdots, x_n)'$ wie folgt in Matrixschreibweise darstellen:

1. $\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i = \frac{1}{n}\mathbf{1}'x = w'x$,
   wobei $w = \frac{1}{n}\mathbf{1} = (\frac{1}{n}, \cdots, \frac{1}{n})'$.
2. $s^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})^2 = \frac{1}{n}(x - \bar{\mathbf{x}})'(x - \bar{\mathbf{x}})$,
   wobei $\bar{\mathbf{x}} = (\bar{x}, \cdots, \bar{x})'$.

△

Für die Matrixmultiplikation gelten folgende Rechenregeln:

Satz 1.3 (Rechenregeln für die Matrixmultiplikation)

Für Matrizen $\mathbf{A}$,$\mathbf{B}$, $\mathbf{C}$ *passender Ordnung gilt:*

1. $\mathbf{A}(\mathbf{B} + \mathbf{C}) = \mathbf{AB} + \mathbf{AC}$
2. $(\mathbf{AB})\mathbf{C} = \mathbf{A}(\mathbf{BC})$
3. $(\mathbf{AB})' = \mathbf{B}'\mathbf{A}'$
4. $\mathbf{AI}_n = \mathbf{A}$ *bzw.* $\mathbf{I}_n\mathbf{A} = \mathbf{A}$

2

Lineare Gleichungssysteme

Die Lösung linearer Gleichungssysteme spielt in vielen Bereichen eine wichtige Rolle, beispielsweise bei der Bestimmung der KQ-Schätzer im linearen Regressionsmodell. Wir beginnen mit einem kleinen motivierenden Beispiel:

Beispiel 2.1 (Fertigungsprozess eines Produktes)
Als Anwendungsbeispiel für lineare Gleichungssysteme betrachten wir den Fertigunsprozess eines Endproduktes D. Wir nehmen an, dass zur Fertigung von D die Zwischenprodukte A, B, und C benötigt werden, die wiederum aus mehreren Teilen zusammengesetzt sein können. Eine solche Situation kann man in dem in Abbildung 2.1 dargestellten Graphen veranschaulichen. In diesem Fall wird das Endprodukt D aus je einem Teil des Produktes A, drei Teilen von B und vier Teilen von C hergestellt. Zur Fertigung des Zwischenproduktes B wird ein Teil von A benötigt, zur Fertigung von C sind je zwei Teile von A und B nötig.

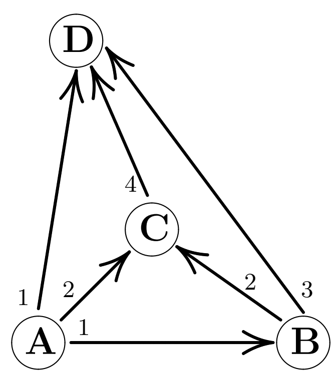

Abbildung 2.1. Graphische Veranschaulichung des Fertigungsprozesses eines Produktes D.

Es stellt sich die Frage, wie groß der Gesamtbedarf aller Produktionselemente bei Herstellung einer gewissen Anzahl von Endprodukten ist. Wir können diese Fragestellung in ein System von vier Gleichungen übersetzen. Dazu definieren wir den Vektor $x = (x_1, x_2, x_3, x_4)'$, der angibt wie viele Teile der Produkte A, B, C und D produziert werden müssen. Wir assoziieren x_1 mit dem Produkt A, x_2 mit dem Produkt B usw.. Angenommen wir wollen 25 Stück des Endproduktes D produzieren, dann gilt $x_4 = 25$. Das

Zwischenprodukt A wird jeweils einmal zur Produktion eines Endproduktes D und eines Zwischenproduktes B und zweimal zur Produktion von C benötigt. Es muss also

$$x_1 = 1 \cdot x_2 + 2 \cdot x_3 + 1 \cdot x_4$$

gelten. Das Zwischenprodukt B wird zweimal zur Produktion eines Teils von C und dreimal zur Produktion von D benötigt. Wir erhalten also

$$x_2 = 2 \cdot x_3 + 3 \cdot x_4.$$

Schließlich benötigen wir 4 Teile von C zur Produktion eines Endproduktes D, woraus die Gleichung

$$x_3 = 4 \cdot x_4$$

folgt. Zusammenfassend ergibt sich ein System von vier Gleichungen:

$$\begin{aligned}
1 \cdot x_1 - 1 \cdot x_2 - 2 \cdot x_3 - 1 \cdot x_4 &= 0 \\
0 \cdot x_1 + 1 \cdot x_2 - 2 \cdot x_3 - 3 \cdot x_4 &= 0 \\
0 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 + 1 \cdot x_3 - 4 \cdot x_4 &= 0 \\
0 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 + 0 \cdot x_3 + 1 \cdot x_4 &= 25
\end{aligned}$$

Hierbei handelt es sich um ein Beispiel für ein lineares Gleichungssystem. Wir können das Gleichungsystem kompakt in Matrixschreibweise darstellen als

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & -2 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 25 \end{pmatrix}.$$

Mit der Koeffizientenmatrix

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & -2 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

und dem Ergebnisvektor

$$b = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 25 \end{pmatrix}$$

erhalten wir

$$\mathbf{A}x = b.$$

Die Lösung dieses speziellen Gleichungssystems stellt sich als vergleichsweise einfach dar, weil die Koeffizientenmatrix $\mathbf{A}$ eine ganz spezielle Form besitzt. Es handelt sich um eine Matrix in Dreiecksformat, d.h. alle Einträge unterhalb der Hauptdiagonalen sind gleich Null. Durch die spezielle Form der Matrix können wir die Lösungen mehr oder weniger „ablesen". Wir beginnen mit x_4 und erhalten $x_4 = 25$. Einsetzen von x_4 in die dritte Gleichung liefert $x3 - 4 \cdot 25 = 0$, also $x_3 = 100$. Anschließend fahren wir fort mit x_2 and berechnen zuletzt x_1. Als Lösungsvektor erhalten wir

$$x = \begin{pmatrix} 500 \\ 275 \\ 100 \\ 25 \end{pmatrix}.$$

Um das Produkt D in 25 facher Ausfertigung herzustellen, braucht man also 500 Stück von Produkt A, 275 Stück von B, sowie 100 Stück von C.

Läge die Koeffizientenmatrix $\mathbf{A}$ nicht in Dreiecksform vor, dann könnte die Lösung nicht so leicht berechnet werden wie in diesem Beispiel. Es ist also wünschenswert, dass die Koeffizientenmatrix in Dreiecksform vorliegt. Tatsächlich ist ein möglicher allgemeiner Ansatz zur Lösung linearer Gleichungssysteme dadurch gegeben, dass die Koeffizientenmatrix durch bestimmte Matrixoperationen in Dreiecksform transformiert wird, so dass anschließend die Lösung abgelesen (bzw. leicht berechnet) werden kann.

Wir können den Produktionsprozess aus Abbildung 2.1 auch noch auf andere Art und Weise ableiten. Wir definieren die Matrix

$$\mathbf{D} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

die sich wie folgt interpretieren lässt: In jeder Zeile kann man ablesen, wieviele Teile eines Produktes man benötigt, um das Produkt der jeweiligen Spalte herzustellen. Beispielsweise benötigt man zur Herstellung des Produktes C (3. Spalte) 2 Teile des Produktes B (2. Zeile). In den Spalten lässt sich ablesen, wieviele Stücke aller anderen Produkte gebraucht werden, um das jeweilige Produkt zusammenzusetzen. Zur Herstellung von D (4. Spalte) benötigt man also 1 Teil von A (1. Zeile), 3 Teile von B (2. Zeile), 4 Teile von C (3. Zeile) und 0 Teile von D (4. Zeile). Die Matrix $\mathbf{A}$ ist dann gegeben durch $\mathbf{A} = \mathbf{I} - \mathbf{D}$.

Wie wir später noch sehen werden, kann die Lösung auch in Abhängigkeit einer sogenannten Inversen $\mathbf{A}^{-1}$ von $\mathbf{A}$ geschrieben werden. Es gilt

$$x = \mathbf{A}^{-1}b = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 4 & 20 \\ 0 & 1 & 2 & 11 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 25 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 500 \\ 275 \\ 100 \\ 25 \end{pmatrix}.$$

Die Darstellung des Fertigungsprozesses durch Matrizen hat den Vorteil, dass der Bedarfsvektor b beliebig verändert werden kann, ohne dass jedesmal eine neue Berechnung angestellt werden muss. Wenn z.B. zusätzlich noch drei Stück von Produkt C benötigt werden, erhalten wir

$$x = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 4 & 20 \\ 0 & 1 & 2 & 11 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \\ 25 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 512 \\ 281 \\ 103 \\ 25 \end{pmatrix}.$$

Die benötigte Stückzahl von Teil C erhöht sich um drei, die Stückzahl von Teil B demnach um sechs Stück usw..

$\triangle$

Wir wollen jetzt allgemein definieren was man unter einem linearen Gleichungssystem versteht:

Definition 2.1 (Lineares Gleichungssystem)
Unter einem linearen Gleichungssystem mit Unbekannten $x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R}$ versteht man ein System von m Gleichungen der Form

$$\begin{array}{ccccccccc} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \cdots & + & a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \cdots & + & a_{2n}x_n & = & b_2 \\ \vdots & & \vdots & & & & \vdots & = & \vdots \\ a_{m1}x_1 & + & a_{m2}x_2 & + & \cdots & + & a_{mn}x_n & = & b_m \end{array}$$

wobei die Skalare $a_{ij}, b_i \in \mathbb{R}$ bekannte Koeffizienten sind. Fasst man die Skalare a_{ij}, $i = 1, \ldots, m$, $j = 1, \ldots, n$, zur $m \times n$ Matrix $\mathbf{A}$ und x_i und b_i zu den $n \times 1$ bzw. $m \times 1$ Spaltenvektoren x und b zusammen so lässt sich ein lineares Gleichungsystem durch

$$\mathbf{A}x = b$$

in Matrixnotation schreiben.

Beispiel 2.2

Das Gleichungssystem

$$\begin{array}{rcrcrl} 2x_1 & + & 1x_2 & - & 2x_3 = & 10 \\ 6x_1 & + & 4x_2 & + & 4x_3 = & 2 \\ 5x_1 & + & 4x_2 & + & 3x_3 = & 4 \end{array}$$

besteht aus 3 Gleichungen mit 3 Unbekannten. In Matrixnotation erhalten wir

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 6 & 4 & 4 \\ 5 & 4 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

Dieses sehr einfache Gleichungssystem ist noch ohne spezielle Lösungstechniken lösbar. Man löse eine Gleichung nach einer Unbekannten auf und setze in die beiden anderen Gleichungen ein, usw. In der Statistik und in vielen anderen Anwendungsgebieten treten aber Gleichungssysteme mit hunderten oder gar tausenden von Gleichungen und Unbekannten auf. Hier ist man darauf angewiesen automatisierte Lösungstechniken zur Verfügung zu haben, die auch im Computer programmiert werden können.

△

Wie wir bereits in Beispiel 2.1 gesehen haben, ist es günstig, wenn die Koeffizientenmatrix eines linearen Gleichungssystems in Dreiecksform vorliegt. Die folgende Definition definiert Matrizen in Dreiecksform:

Definition 2.2 (Dreiecksform einer Matrix)

Eine $m \times n$ Matrix $\mathbf{A} \neq \mathbf{0}$ liegt in Dreiecksform vor, wenn sämtliche Elemente unterhalb der Hauptdiagonalen $a_{11}, a_{22}, \dots$ Null sind und die ersten r, $r \geq 1$, Elemente auf der Hauptdiagonalen ungleich Null sind. Sie hat also folgende Gestalt hat:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & & & & & & \\ 0 & a_{22} & & & & & \\ \vdots & & \ddots & & & & \\ 0 & 0 & \dots & a_{rr} & & & \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & & & & \ddots & \vdots \\ 0 & & \dots & & & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

Beispiel 2.3
Die Matrix

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 & 2 \\ 0 & 4 & 3 & 8 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

befindet sich genauso wie die Matrix

$$\mathbf{C} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 & 2 \\ 0 & 4 & 3 & 8 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

in Dreiecksform. Die Matrix

$$\mathbf{C} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 & 2 \\ 0 & 4 & 3 & 8 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \\ 6 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

liegt hingegen nicht in Dreiecksform vor.

△

Beispiel 2.4 (Dreiecksform und lineare Gleichungssysteme)
Wir demonstrieren anhand eines einfachen Beispiels, warum Matrizen in Dreiecksform eine wichtige Rolle bei der Lösung linearer Gleichungssysteme spielen. Betrachte das Gleichungssystem

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 10 \\ 0 & 0 & -7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ -28 \\ 21 \end{pmatrix}.$$

Offensichtlich befindet sich die Koeffizientenmatrix in Dreiecksform und wir erkennen unmittelbar den entscheidenden Vorteil. Da die Koeffizientenmatrix sich in Dreiecksform befindet, können wir (fast) ohne weitere Umformungen die Lösungen “ablesen”. Wir beginnen bei der Berechnung von x_3 und erhalten unmittelbar

$$x_3 = -21/7 = -3.$$

Weiter erhalten wir (unter Verwendung der soeben erhaltenen Lösung für x_3)

$$x_2 = (-28 - 10x_3)/1 = -28 + 10 \cdot 3 = 2.$$

Zuletzt ergibt sich

$$x_1 = (10 + 2x_3 - 1x_2)/2 = (10 - 2 \cdot 3 - 1 \cdot 2)/2 = 1.$$

△

Grundsätzlich können wir im Zusammenhang mit linearen Gleichungssystemen drei Situationen unterscheiden:

1. Das Gleichungsystem $\mathbf{A}x = b$ ist eindeutig lösbar, d.h. es existiert genau eine Lösung.
2. Das Gleichungssystem $\mathbf{A}x = b$ besitzt beliebig viele Lösungen.
3. Das Gleichungssystem $\mathbf{A}x = b$ ist nicht lösbar. In diesem Fall sprechen wir von einem inkonsistenten Gleichungssystem.

Es stellt sich heraus, dass die Lösbarkeit linearer Gleichungssysteme wieder leicht bestimmt werden kann, wenn die Koeffizientenmatrix $\mathbf{A}$ in Dreiecksform vorliegt. Die folgenden drei Beispiele verdeutlichen dies.

Beispiel 2.5 (Eindeutig lösbares Gleichungssystem)
Betrachte wieder das Gleichungssystem aus Beispiel 2.4

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 10 \\ 0 & 0 & -7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ -28 \\ 21 \end{pmatrix}.$$

Offenbar kommen für x_3, x_2 und x_1 nur die in Beispiel 2.4 berechneten Lösungen in Frage, das Gleichungssystem ist also eindeutig lösbar.

△

Beispiel 2.6 (Ein Gleichungssystem mit beliebig vielen Lösungen)
Betrachte das lineare Gleichungssystem:

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & -2 \\ 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Die Koeffizientenmatrix befindet sich wieder in Dreiecksform. Wir stellen fest, dass die dritte Gleichung stets richtig ist, unabhängig davon welche Werte wir für x_1, x_2 x_3 einsetzen. Analog zu den vorangegangenen Beispielen bestimmen wir zunächst die Lösung für x_3. Da die dritte Gleichung immer richtig ist, könne wir x_3 frei wählen. Wir wählen zum Beispiel $x_3 = 1$. Dann erhalten wir $x_2 = (-2 - 4 \cdot 1)/2 = -3$ und $x_1 = (5 - 3 \cdot (-3) + 2 \cdot 1)/2 = 8$. Andererseits könnten wir auch $x_3 = 0$ wählen. Dann erhalten wir $x_2 = -1$ und $x_1 = 4$. Das Gleichungssystem besitzt also beliebig viele Lösungen.

Beispiel 2.7 (Ein inkonsistentes Gleichungssystem)
Betrachte das folgende lineare Gleichungssystem:

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & -2 \\ 0 & -\frac{7}{2} & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ -\frac{1}{2} \\ -8 \end{pmatrix}.$$

Offensichtlich befindet sich die Koeffizientenmatrix wieder in Dreiecksform. Wir können mit einem Blick ablesen, ob das Gleichungssystem lösbar ist oder nicht. Im vorliegenden Fall handelt es sich um ein unlösbares Gleichungssystem, weil die dritte Gleichung

$$0 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 + 0 \cdot x_3 = -8$$

keine Lösungen besitzt.

$\triangle$

Wir können in dieser Einführung nicht auf alle Details bei der Lösung linearer Gleichungssysteme eingehen. Trotzdem kann die grundlegende Vorgehensweise skizziert werden. Bei der Lösung eines beliebigen Gleichungssystems kann in etwa wie folgt vorgegangen werden:

- Reduziere die Koeffizientenmatrix $\mathbf{A}$ eines linearen Gleichungssystems $\mathbf{A}x = b$ durch noch zu präzisiernde Zeilen- und Spaltenoperationen auf Dreiecksform. Wenn die dazu nötigen Operationen auch auf den Ergebnisvektor b angewendet werden, dann lässt sich zeigen, dass die Lösungen des Gleichungssystems durch diese Operationen *unverändert* bleiben. Ein Beispiel haben wir bereits kennengelernt. Das Gleichungssystem in Beispiel 2.4 ist nämlich durch Zeilen- und Spaltenoperationen aus dem Gleichungssystem in Beispiel 2.2 hervorgegangen.
- In einem zweiten Schritt können dann die Lösungen aus dem System in Dreiecksform "abgelesen" werden. Dabei geht man völlig analog zu Beispiel 2.4 vor. In einigen Fällen stellt sich heraus, dass das Gleichungssystem nicht lösbar ist. Dies kann aber auch leicht abgelesen werden, wenn sich die Koeffizientenmatrix in Dreiecksform befindet, vergleiche Beispiel 2.7.

Wir wollen im Folgenden einen Algorithmus zur Reduzierung (Umformung) einer Matrix auf Dreiecksform vorstellen. Um eine Matrix auf Dreiecksform zu reduzieren werden sogenannte *elementare Matrixoperationen* benötigt.

Elementare Matrixoperationen sind

1. das Vertauschen der i–ten und j–ten Zeile (Spalte) einer Matrix $\mathbf{A}$,
2. die Multiplikation der i–ten Zeile (Spalte) mit einem Skalar λ,
3. die Addition des λ–fachen der i–ten Zeile (Spalte) zur j–ten Zeile (Spalte).

Mit den soeben definierten Matrixoperationen lässt sich nun folgender Algorithmus zur Reduktion einer Matrix auf Dreiecksgestalt angeben:

Algorithmus 2.1 (zur Reduzierung auf Dreiecksgestalt)

Gegeben sei die $m \times n$ Matrix $\mathbf{A}$ mit $\mathbf{A} \neq \mathbf{0}$. Diese lässt sich gemäß dem folgenden Algorithmus auf Dreiecksform reduzieren:

1. *Setze $i = 1$.*
2. *Sind alle Zeilen $i+1, \ldots, m$ Null, dann Abbruch des Verfahrens. Die Matrix befindet sich in Dreiecksgestalt.*
3. *Ist das Element a_{ii} ungleich Null, dann fahre fort mit 4. Ansonsten suche eine Zeile k $(k > i)$, in der das Element a_{ki} ungleich Null ist und vertausche die Zeilen i und k. Kann keine solche Zeile gefunden werden, dann suche eine Spalte k $(k > i)$, in der mindestens eines der Elemente $a_{ik}, \ldots, a_{mk}$ ungleich Null ist (hier: a_{rk}) und vertausche die Spalten i und k. Sodann vertausche die Zeilen i und r.*
4. *Addiere für $j = i+1, \ldots, m$ zur j–ten Zeile das $-\frac{a_{ji}}{a_{ii}}$ fache der i–ten Zeile.*
5. *Setze $i = i+1$. Für $i = m$ Abbruch des Verfahrens. Die Matrix befindet sich in diesem Fall in Dreiecksform. Ansonsten Rücksprung auf 2.*

Wie aus dem Algorithmus ersichtlich ist, kann jede von Null verschiedene Matrix in Dreiecksform gebracht werden.

Beispiel 2.8

Gegeben sei die Matrix

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 3 & 5 & 1 \end{pmatrix}.$$

Wir bringen die Matrix durch folgende Schritte auf Dreiecksform:

1. Schritt: $(i = 1, j = 2)$

Da $a_{11} = 2 \neq 0$, addieren wir zur 2. Zeile das $-\frac{a_{21}}{a_{11}} = -\frac{1}{2}$ fache der 1. Zeile. Wir erhalten die Matrix

$$\mathbf{A}^{(1)} := \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 - \frac{1}{2} \cdot 2 & 1 - \frac{1}{2} \cdot 3 & 1 - \frac{1}{2} \cdot 1 \\ 3 & 5 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 3 & 5 & 1 \end{pmatrix}.$$

2. Schritt: $(i = 1, j = 3)$
Wir addieren zur 3. Zeile das $-\frac{a_{31}}{a_{11}} = -\frac{3}{2}$ fache der 1. Zeile. Wir erhalten

$$\mathbf{A}^{(2)} := \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 3 - \frac{3}{2} \cdot 2 & 5 - \frac{3}{2} \cdot 3 & 1 - \frac{3}{2} \cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

3. Schritt: $(i = 2, j = 3)$
Da in $\mathbf{A}^{(2)}$ das Element $a_{22} = -\frac{1}{2} \neq 0$, addieren wir zur 3. Zeile das $-\frac{a_{32}}{a_{22}} = 1$ fache der 2. Zeile und erhalten

$$\mathbf{A}^{(3)} := \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} - 1 \cdot \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} + 1 \cdot \frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Damit befindet sich die Matrix $\mathbf{A}^{(3)}$ in Dreiecksform. Es ist aber wichtig sich klarzumachen, dass die aus der Matrix $\mathbf{A}$ hervorgegangene Matrix $\mathbf{A}^{(3)}$ *nicht* gleich $\mathbf{A}$ oder irgendwie äquivalent ist.

$\triangle$

Beispiel 2.9
Betrachte das Gleichungssystem

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & -2 \\ 1 & -2 & 3 \\ 4 & -1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Wir reduzieren zunächst die Koeffizientenmatrix auf Dreiecksform und wenden die dazu nötigen Operationen auch auf $b = (5, 2, 1)'$ an. Die Koeffizientenmatrix wird durch folgende Operationen auf Dreiecksform reduziert:

– Addition des $-\frac{1}{2}$ fachen der 1. Zeile zur 2. Zeile

– Addition des $-\frac{4}{2} = -2$ fachen der 1. Zeile zur 3. Zeile

– Addition des -2 fachen der 2. Zeile zur 3. Zeile

Wir erhalten das äquivalente Gleichungssystem

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & -2 \\ 0 & -\frac{7}{2} & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ -\frac{1}{2} \\ -8 \end{pmatrix}.$$

Wir erhalten also als äquivalentes Gleichungssystem das inkonsistente System aus Beispiel 2.7.

△

3

Matrixkennzahlen

3.1 Rang einer Matrix

Eine wichtige Rolle spielt im Folgenden die lineare Unabhängigkeit von Vektoren.

Definition 3.1 (lineare (Un)–Abhängigkeit von Vektoren)
Eine Menge von n Vektoren $x_1, x_2, \ldots, x_n \in \mathbb{R}^m$ heißt linear unabhängig, wenn für jede Linearkombination mit $a_1 x_1 + \cdots + a_n x_n = 0$ $(a_i \in \mathbb{R})$ stets $a_1 = a_2 = \cdots = a_n = 0$ gilt. Andernfalls heißen die $x_1, \ldots, x_n$ linear abhängig.

Beispiel 3.1
Wir betrachten die Vektoren

$$x_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}, \qquad x_2 = \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}, \qquad x_3 = \begin{pmatrix} 16 \\ -7 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Wenn wir überprüfen wollen, ob die Vektoren linear unabhängig sind, müssen wir das lineare Gleichungssystem

$$\begin{pmatrix} 2 & 4 & 16 \\ 1 & -3 & -7 \\ -2 & 2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

lösen. Wenn sich als einzige Lösung $a_1 = a_2 = a_3 = 0$ ergibt, dann sind die Vektoren linear unabhängig, andernfalls linear abhängig. Im letzten Kapitel wurde die Lösung linearer Gleichungssysteme bereits behandelt. Zur Lösung kann die Koeffizientenmatrix durch elementare Zeilen- und Spaltenoperationen in Dreiecksform gebracht werden und anschließend die Lösung „abgelesen“ werden. Überführung in Dreiecksform liefert das äquivalente System

$$\begin{pmatrix} 2 & 4 & 16 \\ 0 & -5 & -15 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Offensichtlich gibt es neben $a_1 = a_2 = a_3 = 0$ weitere Lösungen. Wir können a_3 beliebig wählen, weil Gleichung drei immer stimmt. Mit $a_3 = 1$ erhalten wir $a_2 = -3$ und $a_1 = -2$. Die Vektoren x_1, x_2 und x_3 sind also linear abhängig.

$\triangle$

Beispiel 3.2
Wir betrachten die Vektoren aus dem $\mathbb{R}^3$

$$x_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \\ 5 \end{pmatrix}, \qquad x_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix}, \qquad x_3 = \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Zum Nachweis der linearen (Un)abhängigkeit lösen wir das Gleichungssystem

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 6 & 4 & 4 \\ 5 & 4 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Überführen in Dreiecksform liefert das äquivalente System

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 10 \\ 0 & 0 & -7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Offenbar kann das Gleichungssystem nur mit $a_1 = a_2 = a_3 = 0$ gelöst werden. Die Vektoren sind daher linear unabhängig.

$\triangle$

Es gilt

Satz 3.1

1. *Eine Menge von n Vektoren $x_1, x_2, \ldots, x_n \in \mathbb{R}^m$ ist genau dann linear abhängig, wenn mindestens einer der Vektoren eine Linearkombination der übrigen ist, d.h.*

$$x_i = a_1 x_1 + \cdots + a_{i-1} x_{i-1} + a_{i+1} x_{i+1} + \cdots + a_n x_n.$$

2. *Eine Menge von $n > m$ Vektoren $x_1, x_2, \ldots, x_n \in \mathbb{R}^m$ ist linear abhängig.*

Beispiel 3.3
Wir betrachten wieder die Vektoren des $\mathbb{R}^3$

$$x_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}, \qquad x_2 = \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}, \qquad x_3 = \begin{pmatrix} 16 \\ -7 \\ 2 \end{pmatrix}$$

aus Beispiel 3.1. Dort wurde gezeigt, dass die Vektoren linear abhängig sind. Es gilt

$$-2x_1 - 3x_2 + x_3 = 0.$$

Beispielsweise x_3 läßt sich also als Linearkombination der übrigen schreiben, denn

$$x_3 = 2x_1 + 3x_2.$$

△

Beispiel 3.4
Wir betrachten die Vektoren des $\mathbb{R}^3$

$$x_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}, \qquad x_2 = \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}, \qquad x_3 = \begin{pmatrix} 16 \\ -7 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

aus Beispiel 3.2. Dort wurde gezeigt, dass die Vektoren linear unabhängig sind. Durch hinzunahme eines beliebigen Vektors x_4 werden die Vektoren gemäß Satz 3.1 linear abhängig.

△

Wir nähern uns jetzt der Definition des Rangs einer Matrix. Zunächst folgende Definition:

Definition 3.2 (Zeilenrang, Spaltenrang, Zeilenraum, Spaltenraum)
Sei $\mathbf{A}$ *eine* $m \times n$ *Matrix. Die Maximalzahl linear unabhängiger Spaltenvektoren des* $\mathbb{R}^m$ *heißt Spaltenrang von* $\mathbf{A}$*, geschrieben* $rgs(\mathbf{A})$*. Entsprechend kann man den Zeilenrang* $rgz(\mathbf{A})$ *von* $\mathbf{A}$ *als die Maximalzahl linear unabhängiger Zeilen von* $\mathbf{A}$ *definieren.*

Für den Spalten– und Zeilenrang gilt:

Satz 3.2
Spaltenrang und Zeilenrang einer $m \times n$ *Matrix* $\mathbf{A}$ *sind gleich, d.h.*

$$rgs(\mathbf{A}) = rgz(\mathbf{A}).$$

Damit ist folgende Definition gerechtfertigt:

Definition 3.3 (Rang einer Matrix)
Der Rang $rg(\mathbf{A})$ einer $m \times n$ Matrix $\mathbf{A}$ ist definiert als die Dimension des Spalten– bzw. Zeilenraumes von $\mathbf{A}$:

$$rg(\mathbf{A}) := rgs(\mathbf{A}) = rgz(\mathbf{A}) \leq \min\{m, n\}$$

Für $rg(\mathbf{A}) = m$ ($rg(\mathbf{A}) = n$) heißt $\mathbf{A}$ zeilenregulär (spaltenregulär).

Für den Rang einer Matrix erhalten wir folgende Regeln:

Satz 3.3 (allgemeine Rangbeziehungen)
Für Matrizen $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}$ passender Ordnung gilt:

1. $rg(\mathbf{A}) = rg(-\mathbf{A})$
2. $rg(\mathbf{A}') = rg(\mathbf{A})$
3. $rg(\mathbf{A}) - rg(\mathbf{B}) \leq rg(\mathbf{A} + \mathbf{B}) \leq rg(\mathbf{A}) + rg(\mathbf{B})$
4. $rg(\mathbf{AB}) \leq \min\{rg(\mathbf{A}), rg(\mathbf{B})\}$
5. $rg(\mathbf{I}_n) = n$

Wir wollen uns jetzt kurz mit der sogenannten Inverse einer quadratischen $n \times n$ Matrix befassen. Es existiert jedoch nicht zu jeder Matrix eine Inverse. Entscheidend für die Existenz der Inverse ist der Rang einer Matrix. Besitzt eine quadratische Matrix maximalen Rang, so existiert auch die Inverse, andernfalls nicht. Im Falle ihrer Existenz ist die Inverse einer Matrix aber eindeutig bestimmt.

Definition 3.4 (inverse Matrix)
Sei $\mathbf{A}$ eine quadratische Matrix. Die Matrix $\mathbf{A}^{-1}$ heißt Inverse zur Matrix $\mathbf{A}$, falls gilt:

$$\mathbf{A}\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{A} = I$$

Für die Inverse gilt folgende Existenz und Eindeutigkeitsaussage:

Satz 3.4
Die Inverse einer quadratischen $n \times n$ Matrix $\mathbf{A}$ existiert genau dann, wenn $rg(\mathbf{A}) = n$ gilt. Sie ist dann eindeutig bestimmt. Eine Matrix, deren Inverse existiert heißt auch regulär.

Wenn die Koeffizientenmatrix eines linearen Gleichungssystems $\mathbf{A}x = b$ invertierbar ist, dann ist das Gleichungssystem eindeutig lösbar und es gilt

$$x = \mathbf{A}^{-1}b.$$

Beispiel 3.5
Betrachte die Matrix

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 3 & 5 & 1 \end{pmatrix}.$$

Durch Multiplikation verifiziert man leicht, dass

$$\mathbf{A}^{-1} = \begin{pmatrix} -5 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & -1 \\ 5 & -1 & -3 \end{pmatrix}.$$

die Inverse zur Matrix $\mathbf{A}$ ist.

△

3.2 Determinante einer Matrix

Jeder quadratischen $n \times n$ Matrix A ist eine Zahl zugeordnet, die sogenannte Determinante:

Definition 3.5 (Determinante)
Sei $\mathbf{A}$ eine quadratische $n \times n$ Matrix und sei $\mathbf{M}_{ij}$ die Teilmatrix von $\mathbf{A}$, die man durch Streichen der i-ten Zeile und der j-ten Spalte erhält. Dann ist die Determinante von $\mathbf{A}$ definiert als

$$det(\mathbf{A}) = a_{11}$$

falls $\mathbf{A}$ eine 1×1 Matrix ist und

$$det(A) = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} det(\mathbf{M}_{ij}).$$

Mit $\mathbf{A}_{ij} = (-1)^{i+j} det(\mathbf{M}_{ij})$ erhalten wir auch

$$det(A) = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \mathbf{A}_{ij}.$$

Wir sprechen in diesem Zusammenhang auch von der Berechnung der Determinate durch „Entwicklung nach der i-ten Zeile“ . Die Determinante einer Matrix ist stets eindeutig *bestimmt, d.h. es ist egal nach welcher Zeile entwickelt wird. Häufige Bezeichnungsweise:* $det(\mathbf{A}) = |\mathbf{A}|$.

Für Dimensionen $n \leq 3$ lässt sich die Determinante leicht ausrechnen wie folgendes Beispiel zeigt:

Beispiel 3.6

1. Für eine 2×2 Matrix gilt $det(\mathbf{A}) = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$.
2. Für eine 3×3 Matrix gilt $det(\mathbf{A}) = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{23}a_{32}a_{11} - a_{33}a_{12}a_{21}$.

△

Beispiel 3.7
Betrachte die Matrix

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 6 & -4 & -10 & 4 \\ -5 & 2 & 8 & -5 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & -3 & -5 & 8 \end{pmatrix}.$$

Da in der 3. Zeile 3 mal die Null steht und einmal die Eins, entwickeln wir zweckmäßigerweise nach der 3. Zeile. Wir erhalten

$$\begin{aligned} det(A) &= a_{31} \cdot \mathbf{A}_{31} + a_{32} \cdot \mathbf{A}_{32} + a_{33} \cdot \mathbf{A}_{33} + a_{34} \cdot \mathbf{A}_{34} \\ &= a_{32} \cdot \mathbf{A}_{32} \\ &= (-1)^{3+2} det(\mathbf{M}_{32}) \\ &= -1 \cdot det \begin{pmatrix} 6 & -10 & 4 \\ -5 & 8 & -5 \\ 2 & -5 & 8 \end{pmatrix} \\ &= (-1)(6 \cdot 8 \cdot 8 - 10(-5) \cdot 2 + 4(-5)(-5) - 2 \cdot 8 \cdot 4 + 5(-5)6 - 8(-5)(-10)) \\ &= (-1)(384 + 100 + 100 - 64 - 150 - 400) \\ &= (-1)(-30) = 30. \end{aligned}$$

Dabei wurde die explizite Form der Determinante einer 3×3 Matrix aus Beispiel 3.6 benutzt.

△

Die Determinante einer Matrix $\mathbf{A}$ läßt sich geometrisch interpretieren. Wir veranschaulichen die geometrische Interpretation anhand der Determinante der 2×2 Matrix

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Die beiden Spaltenvektoren $a_1 = (4, 1)'$ und $a_2 = (2, 3)'$ der Matrix sind als Ortsvektoren in Abbildung 3.1 abgebildet. Die Determinante von $\mathbf{A}$ ist gegeben durch

$$det(\mathbf{A}) = 4 \cdot 3 - 2 \cdot 1.$$

Die Determinante von $\mathbf{A}$ ist also gleich dem *Flächeninhalt* des von den den beiden Spaltenvektoren gebildeten Parallelogramms. Diese Interpretation einer Determinante ist allgemeingültig. Bei 3×3 Matrizen handelt es sich bei der Determinante von $\mathbf{A}$ um das Volumen des von den drei Spaltenvektoren aufgespannten Körpers. Für $n > 3$ ergeben sich analoge Interpretationen.

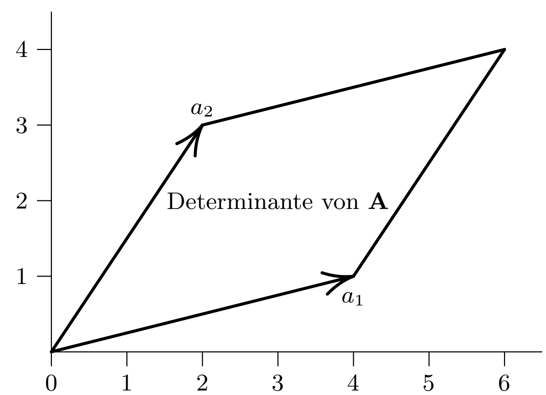

Abbildung 3.1. Geometrische Veranschaulichung der Determinante einer 2×2 Matrix.

Wir tragen im Folgenden noch einige nützliche Eigenschaften von Determinanten zusammen. Für einige spezielle Matrizen lässt sich die Determinante sofort angeben:

Satz 3.5 (Determinante einiger bestimmter Matrizen)
Sei $\mathbf{A}$ *eine quadratische Matrix. Dann gilt:*

1. *Wenn eine Zeile (Spalte) von* $\mathbf{A}$ *aus Nullen besteht, dann gilt* $det(\mathbf{A}) = 0$.
2. *Wenn* $\mathbf{A}$ *zwei identische Zeilen (Spalten) besitzt, dann gilt* $det(\mathbf{A}) = 0$
3. *Die Determinante einer Matrix in Dreiecksform ist das Produkt der Diagonalelemente.*
4. $det(\mathbf{I}) = 1$

Der folgende Satz zeigt die Auswirkung elementarer Matrixoperationen auf die Determinante:

Satz 3.6
Sei $\mathbf{B}$ *die Matrix, die man aus der* $n \times n$ *Matrix* $\mathbf{A}$ *erhält, wenn man*

1. *eine Zeile (Spalte) von* $\mathbf{A}$ *mit* λ *multipliziert. Dann gilt* $det(\mathbf{B}) = \lambda det(\mathbf{A})$.
2. *zwei Zeilen (Spalten) von* $\mathbf{A}$ *vertauscht. Dann gilt* $det(\mathbf{B}) = -det(\mathbf{A})$.
3. *das* λ*–fache der* i*–ten Zeile (Spalte) zur* j*–ten Zeile (Spalte) addiert. Dann gilt* $det(\mathbf{B}) = det(\mathbf{A})$.

Beispiel 3.8
Betrachte die Matrix

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 10 \\ 0 & 0 & -7 \end{pmatrix},$$

die uns bereits in Beispiel 2.5 begegnet ist. Offenbar befindet sich $\mathbf{A}$ in Dreiecksform. Damit ist die Determinante gemäß Satz 3.5 3) gegeben als das Produkt der Diagonalelemente, d.h.

$$det(\mathbf{A}) = 2 \cdot 1 \cdot -7 = -14.$$

△

Wie das vorangegangene Beispiel zeigt, erweist es sich bei der Berechnung der Determinante einer Matrix wieder als günstig wenn diese sich in Dreiecksform befindet. Tatsächlich liefern die Sätze 3.5 und 3.6 auch eine alternative Möglichkeit zur Berechnung der Detereminante einer Matrix. Durch Zeilen– bzw. Spaltenvertauschungen und Addition des λ–fachen der i–ten Zeile zur j–ten Zeile kann die Matrix $\mathbf{A}$ zunächst auf Dreiecksform gebracht werden. Bezeichnet man die Matrix in Dreiecksform mit $\mathbf{B}$, so stimmen aufgrund von Satz 3.6.2 und 3.6.3 die Determinanten beider Matrizen bis auf das Vorzeichen überein. Bezeichne s die Anzahl der Zeilen und Spaltenvertauschungen, die nötig sind um $\mathbf{A}$ auf Dreiecksgestalt zu bringen und seien $b_{11}, \ldots, b_{nn}$ die Diagonalelemente von $\mathbf{B}$, dann ist die Determinante von $\mathbf{A}$ gegeben durch:

$$det(\mathbf{A}) = (-1)^s b_{11} \cdots b_{nn}$$

Beispiel 3.9
Betrachte die Matrix

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 6 & -4 & -10 & 4 \\ -5 & 2 & 8 & -5 \\ -2 & 4 & 7 & -3 \\ 2 & -3 & -5 & 8 \end{pmatrix}.$$

Wir bringen die Matrix durch folgende elementare Zeilen– und Spaltenoperationen auf Dreiecksform:

– Addiere das $\frac{5}{6}$ fache der 1. Zeile zur 2. Zeile

– Addiere das $\frac{2}{6} = \frac{1}{3}$ fache der 1. Zeile zur 3. Zeile

– Addiere das $-\frac{2}{6} = -\frac{1}{3}$ fache der 1. Zeile zur 4. Zeile

– Addiere das $\frac{8}{3}\frac{3}{4} = 2$ fache der 2. Zeile zur 3. Zeile

– Addiere das $\frac{5}{3}\frac{3}{8} = \frac{5}{8}$ der 2. Zeile zur 4. Zeile

– Addiere das $-\frac{15}{24 \cdot 3} = -\frac{5}{24}$ fache der 3. Zeile zur 4. Zeile

Wir erhalten die Matrix:

$$\tilde{\mathbf{A}} = \begin{pmatrix} 6 & -4 & -10 & 4 \\ 0 & -\frac{4}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{5}{3} \\ 0 & 0 & 3 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{160}{24} \end{pmatrix}$$

Da keine Zeilen und Spaltenvertauschungen notwendig waren, um $\mathbf{A}$ auf Dreiecksform zu bringen, folgt

$$det(\mathbf{A}) = det(\tilde{\mathbf{A}}) = 6 \cdot (-\frac{4}{3}) \cdot 3 \cdot \frac{160}{24} = -160.$$

△

Weitere Eigenschaften der Determinante findet man im folgenden Satz:

Satz 3.7 (Eigenschaften von Determinanten)
Für die Determinante einer $n \times n$ Matrix $\mathbf{A}$ gilt:

1. $det(\mathbf{A}') = det(\mathbf{A})$
2. $det(k\mathbf{A}) = k^n det(\mathbf{A})$
3. $det(\mathbf{A}) \neq 0 \Longleftrightarrow rg(\mathbf{A}) = n$
4. $det(\mathbf{AB}) = det(\mathbf{A})det(\mathbf{B})$

5. $det(A^{-1}) = \dfrac{1}{det(\mathbf{A})}$

Die Aussage 3 des Satzes bedeutet insbesondere, dass eine Matrix genau dann invertierbar ist, wenn die Determinante ungleich Null ist. In diesem Fall ist ein Gleichungssystem $\mathbf{A}x = b$ auch *eindeutig* lösbar.

3.3 Die Spur einer Matrix

Definition 3.6 (Spur einer Matrix)
Sei $\mathbf{A} = (a_{ij})$ eine quadratische $n \times n$ Matrix. Dann heißt die Summe der Diagonalelemente Spur von $\mathbf{A}$, d.h.

$$sp(\mathbf{A}) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}.$$

Satz 3.8 (Eigenschaften der Spur)
Für die Spur der $n \times n$ Matrizen $\mathbf{A}, \mathbf{B}$ gilt:

1. $sp(\mathbf{A} + \mathbf{B}) = sp(\mathbf{A}) + sp(\mathbf{B})$
2. $sp(\mathbf{A}) = sp(\mathbf{A}')$
3. $sp(k\mathbf{A}) = k \cdot sp(\mathbf{A})$
4. $sp(\mathbf{AB}) = sp(\mathbf{BA})$. *Dies bleibt auch für den Fall gültig, dass $\mathbf{A}$ eine $m \times n$ und $\mathbf{B}$ eine $n \times m$ Matrix ist.*
5. *Seien $x, y \in \mathbb{R}^n$. Dann gilt $sp(xy') = sp(yx') = sp(x'y) = x'y$*

Beispiel 3.10
Wir betrachten die Matrix

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 6 & -4 & -10 & 4 \\ -5 & 2 & 8 & -5 \\ -2 & 4 & 7 & -3 \\ 2 & -3 & -5 & 8 \end{pmatrix}.$$

Als Spur von $\mathbf{A}$ erhalten wir

$$sp(\mathbf{A}) = 6 + 2 + 7 + 8 = 23.$$

Index