



Computer-Graphik II

Komplexität des Ray-Tracings

G. Zachmann
Clausthal University, Germany
cg.in.tu-clausthal.de



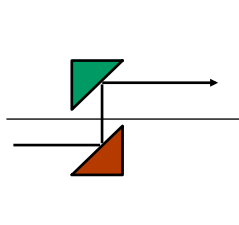
Die theoretische Komplexität des Ray-Tracings

- Definition: das **abstrakte Ray-Tracing Problem (ARTP)**
[Reif, Tygar, Yoshida, 1994]:
 - Ein Entscheidungsproblem
 - Gegeben: ein System von idealisiert spiegelnden und brechenden optischen Elementen (keine Verluste, keine Beugung, monochrom. Licht, etc.);
 - ein Strahl (Anfangsposition & Richtung);
 - und ein Punkt P.
 - Frage: trifft der Strahl (nach endlich vielen Umlenkungen) den Punkt P?

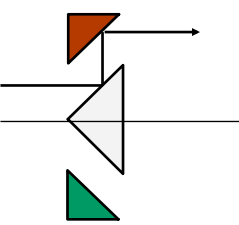
G. Zachmann Computer-Graphik 2 - SS 08 Komplexität des Ray-Tracings 2

Ein optischer Computer

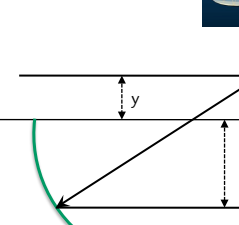
- Einfache optische Elemente:



$y' = y+1$
analog: -1



if ($y > 0$)



$y' = 2 \cdot y$
analog: $\div 2$
- Daraus kann man komplexe optische Elemente bauen, mit einem Eingangsfenster, und zwei Ausgangsfenster

G. Zachmann Computer-Graphik 2 - SS 08
Komplexität des Ray-Tracings 3

- Simulation einer Turing-Maschine (TM) mittels eines optischen Computers:
 - Ein komplexes Element = ein Zustand einer Turing-Maschine
 - Das Ausgangsfenster, durch das der Lichtstrahl das komplexe Element verläßt, entspricht dem nächsten Zustand der TM
 - Binärzahl auf dem Band \rightarrow Lichtstrahl mit Koordinaten $x, y \in [0,1]$
- Satz (o. Bew.):
Das ARTP ist unentscheidbar!

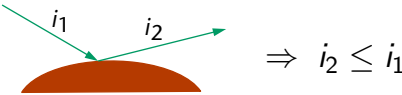
G. Zachmann Computer-Graphik 2 - SS 08
Komplexität des Ray-Tracings 4

- Einschränkung des ARTP:
 - Nur Spiegel die senkrecht zu einer Koordinatenachse stehen
- Satz (o. Bew.):
Dieses eingeschränkte ARTP ist in PSPACE!

G. Zachmann Computer-Graphik 2 - SS 08 Komplexität des Ray-Tracings 5

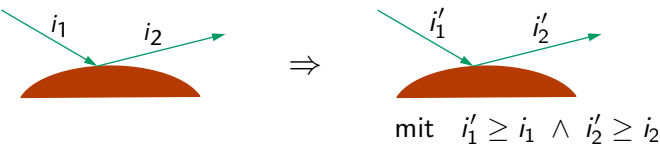
Komplexität des Ray-Tracings realistischer Szenen [Isobe,..., Shizuya, 2005]

- Definition (informell): **realistische Szene**
 - Alle Strahlgänge haben eine **Intensität** $i \in \mathbb{N}$
 - Intensitäten sind auf allen möglichen Strahlgängen **monoton fallend**:





$\Rightarrow i_2 \leq i_1$

- Alle Objekte haben eine **monotone Reflexionscharakteristik**:



mit $i'_1 \geq i_1 \wedge i'_2 \geq i_2$



G. Zachmann Computer-Graphik 2 - SS 08 Komplexität des Ray-Tracings 6

- Definition: das **abstrakte Ray-Tracing Problem** in diesem Kontext:
 - Ein Entscheidungsproblem
 - Gegeben: eine realistische Szene;
 - zwei ausgezeichnete Objekte S und R ;
 - ein $\epsilon > 0, \epsilon \in \mathbb{N}$.
 - Frage: Gibt es einen Strahlgang von S nach R , so daß eine Intensität $> \epsilon$ dort eintrifft?

- Achtung: Darstellung im Folgenden läßt einige technische Details weg!

G. Zachmann Computer-Graphik 2 - SS 08 Komplexität des Ray-Tracings 7

- Annahme: man kann zu jedem Tripel von Objekten O_1, O_2, O_3 der Szene in polynomieller Zeit entscheiden, ob es einen Strahlgang $O_1 \rightarrow O_2 \rightarrow O_3$ gibt.

- Satz (o. Bew.):
Das ARTP ist, mit obiger Annahme, in **polynomieller Zeit** bzgl. der Anzahl der Objekte der Szene lösbar.

- Beweisidee:
Algorithmus, der auf **dynamischem Programmieren** beruht, und ähnlich wie Dijkstra's Algo für *shortest paths* funktioniert.

G. Zachmann Computer-Graphik 2 - SS 08 Komplexität des Ray-Tracings 8

Average-Case Komplexität des Ray-Shootings

- Annahme: wir verwenden Gitter als Acceleration Data Structure
 - Andere DS gehen analog, nur mühsamer
- Annahme: alle Objekte = Kugeln mit Radius r
- Frage: Wie groß ist die **erwartete Anzahl** Strahl-Kugel-Schnitttests bis zum **ersten** Schnitt
- Bezeichnungen:
 - $S(n)$ = erwartete Anzahl Schnitttests
 - n = Anzahl Kugeln in der Szene

G. Zachmann Computer-Graphik 2 - SS 08 Komplexität des Ray-Tracings 10

Der Poisson'sche Punktprozeß

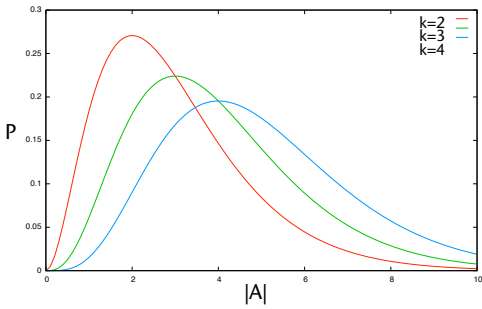
- Definition: **uniforme Verteilung von Punkten im Raum**
 n Punkte $P_1, \dots, P_n \in X \subseteq \mathbb{R}^3$ heißen **uniform** in X verteilt, wenn für beliebiges $A \subseteq X$ gilt

$$P[P_i \in A] = \frac{|A|}{|X|}, 1 \leq i \leq n$$
 wobei $|A| = \text{Vol}(A)$.
- Definition: **homogener Poisson'scher Punktprozeß**
 Ein Prozeß, der gemäß obiger Definition Punkte **uniform** verteilt im Raum erzeugt, und für den gilt

$$\lim_{n, |X| \rightarrow \infty} \frac{n}{|X|} = \rho \geq 0,$$
 d.h., die **Dichte** der Punkte ist konstant, heißt **homogener Poisson'scher Punktprozeß**.

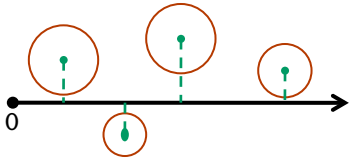
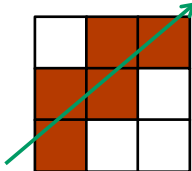
G. Zachmann Computer-Graphik 2 - SS 08 Komplexität des Ray-Tracings 11

■ Satz (o. Bew.):
 Sei $A \subseteq \mathbb{R}^3$, $N(A) = \text{Anzahl Punkte in } A$
 Dann gilt:

$$P[N(A) = k] = \frac{(\rho|A|)^k}{k!} e^{-\rho|A|}, \quad k \geq 0$$


G. Zachmann Computer-Graphik 2 - SS 08 Komplexität des Ray-Tracings 12

Vereinfachende Annahmen zur Analyse

- Annahme im Folgenden: zu jedem Strahl bekommen wir in erwarteter Zeit $O(S(n))$ eine Sortierung der zu testenden Kugeln entlang des Strahls
 
- Gitter ergibt **ungefähre** Sortierung der zu testenden Kugeln entlang des Strahls
 - Macht man während der Traversierung des Gitters implizit
 
- Bemerkung: die Erzeugung dieser ungefähren Sortierung benötigt erwartete Zeit $O(S(n))$

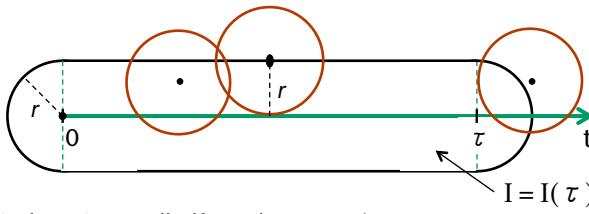
G. Zachmann Computer-Graphik 2 - SS 08 Komplexität des Ray-Tracings 13

- Erinnerung: $S(n)$ = Anzahl getesteter Kugeln
- Sei: $S'(n)$ = Anzahl umsonst getesteter Kugeln
- Klar: $S(n) = S'(n) + 1$
- Frage: $S'(n) = ?$

G. Zachmann Computer-Graphik 2 - SS 08 Komplexität des Ray-Tracings 14

Zwischenziel: Anzahl Punkte in einem Makkaroni

- Ziel: bestimme $F(\tau) =$ Wahrscheinlichkeit, daß es einen Schnitt zwischen Strahl und einer Kugel mit $t \leq \tau$ gibt
- Der Raum aller Kugeln, mit Schnitt $t \leq \tau$:



(Zylinder mit Kugelhälften als Kappen)

- Vereinfachung: vernachlässige die Kugelkappen
 - Ändert am Ergebnis nichts wesentliches, wie man im Verlauf sehen wird
- Volumen: $|I| = \pi r^2 \tau$

G. Zachmann Computer-Graphik 2 - SS 08 Komplexität des Ray-Tracings 15

- Wahrscheinlichkeit, dass sich **kein** Kugelmittelpunkt in I befindet, ist:

$$P[t_0 > \tau] = e^{-\rho|I|}$$
 wobei t_0 = erster Schnittpunkt, ρ = Dichte der Kugelmittelpunkte
- Behauptung einfach nachrechnen:

$$P[t_0 > \tau] = 1 - \sum_{k=1}^{\infty} P[N(I) = k] = 1 - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(\rho|I|)^k}{k!} e^{-\rho|I|}$$

$$= \dots = 1 - e^{-\rho|I|}(e^{\rho|I|} - 1) = e^{-\rho|I|}$$
- Daraus bekommt man die Wahrscheinlichkeitsverteilungsfunktion

$$F(\tau) = P[t_0 \leq \tau] = 1 - P[t_0 > \tau] = 1 - e^{-\rho|I|}$$

G. Zachmann Computer-Graphik 2 - SS 08 Komplexität des Ray-Tracings 16

- Berechne daraus die Dichtefunktion $f(\tau)$ (*probability density function*, PDF), daß es einen Schnitt bei genau $t_0 = \tau$ gibt

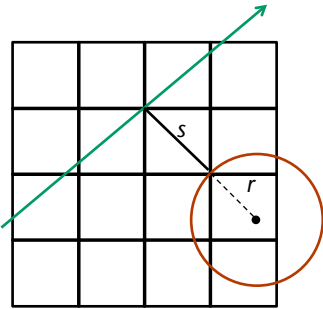
$$f(\tau) = F'(\tau) = \rho|I|e^{-\rho|I|}$$

$$= \rho\pi r^2 \tau e^{-\pi r^2 \tau}$$
- Ziel im Folgenden: wie groß ist die Anzahl der Kugeln, die umsonst getestet werden?

G. Zachmann Computer-Graphik 2 - SS 08 Komplexität des Ray-Tracings 17

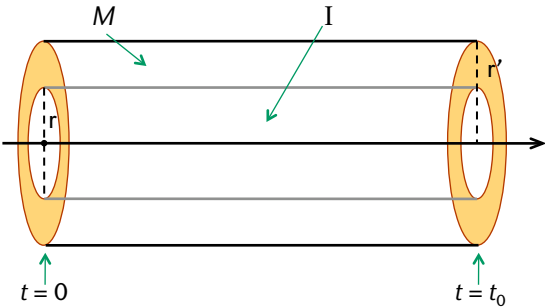
Anzahl umsonst getesteter Kugeln

- Welche Kugeln werden evtl. umsonst getestet?
- Annahme: erster Schnitt bei $t = t_0$
- Also: keine Kugelmittelpunkte in $I(t_0)$
- Aber: Gitter \rightarrow alle Kugeln mit Mittelpunkt in einem Zylinder vom Radius $r' = r + s$ um Strahl herum werden getestet



G. Zachmann Computer-Graphik 2 - SS 08 Komplexität des Ray-Tracings 18

- Wie sieht die Region im Raum aus, die Kugelmittelpunkte enthält, die umsonst getestet werden?



$$|M| = \pi r'^2 t_0 - \pi r^2 t_0 = ((s + r)^2 - r^2) \pi t_0$$

G. Zachmann Computer-Graphik 2 - SS 08 Komplexität des Ray-Tracings 19

- Wahrscheinlichkeit, daß k Punkte in M liegen, bei bekanntem ersten Schnittpunkt:

$$P[t = t_0 \wedge N(M) = k] = \frac{(\rho|M|)^k}{k!} e^{-\rho|M|}$$
- Wahrscheinlichkeit, daß k Punkte in M liegen, bei **nicht** bekanntem ersten Schnittpunkt:

$$\begin{aligned} P[N(M) = k] &= \int_{t=0}^{\infty} P[t_0 = t \wedge N(M) = k] \cdot f(t) dt \\ &= \int_{t=0}^{\infty} \rho|I| \cdot e^{-\rho|I|} \cdot \frac{(\rho|M|)^k}{k!} e^{-\rho|M|} dt \\ &= \dots \\ &= (1 - q)^k \cdot q \end{aligned}$$

geometrische Verteilung mit $q = \left(\frac{r}{r'}\right)^2$

G. Zachmann Computer-Graphik 2 - SS 08 Komplexität des Ray-Tracings 20

- Zusammenfassung: die Wahrscheinlichkeit, daß k Kugeln umsonst getestet werden, ist

$$U(k) = (1 - q)^k \cdot q$$
- Die mittlere Anzahl umsonst getesteter Kugeln ist

$$S(n) = E[U(k)] = \frac{1}{q} = \left(\frac{r'}{r}\right)^2 = \left(1 + \frac{s}{r}\right)^2$$

mit r = Kugelgröße und s = Zellendiagonale
- Achtung:

$$S(n) \in O(1)$$

G. Zachmann Computer-Graphik 2 - SS 08 Komplexität des Ray-Tracings 22