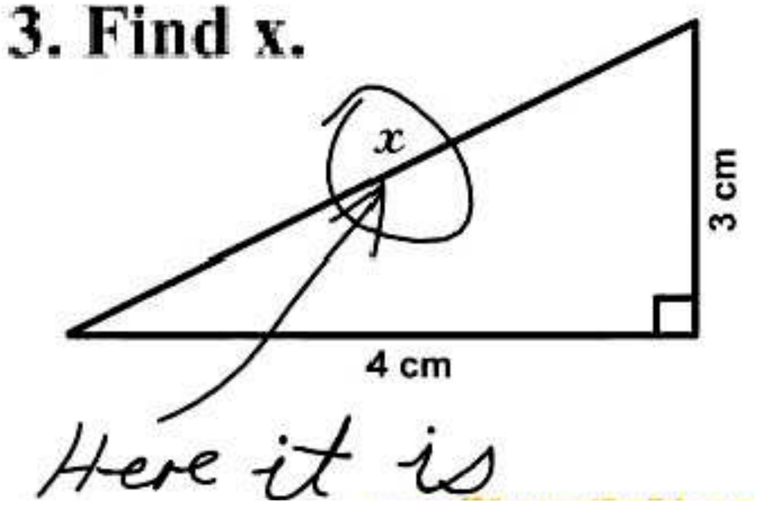
# Computergraphik
## Kurze Wiederholung in Geometrie




G. Zachmann
University of Bremen, Germany
cgvr.cs.uni-bremen.de

# Vektoren

- Notation: in dieser VL schreiben wir Vektoren mit kleinen fetten Buchstaben:

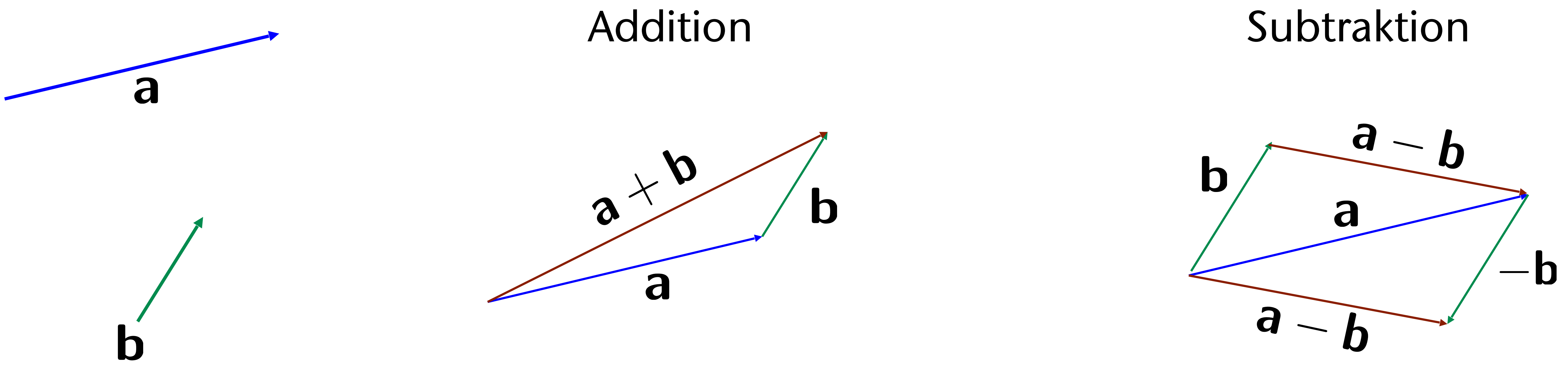
$$\mathbf{a} = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix} \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{pmatrix}$$

- Betrag / Länge:

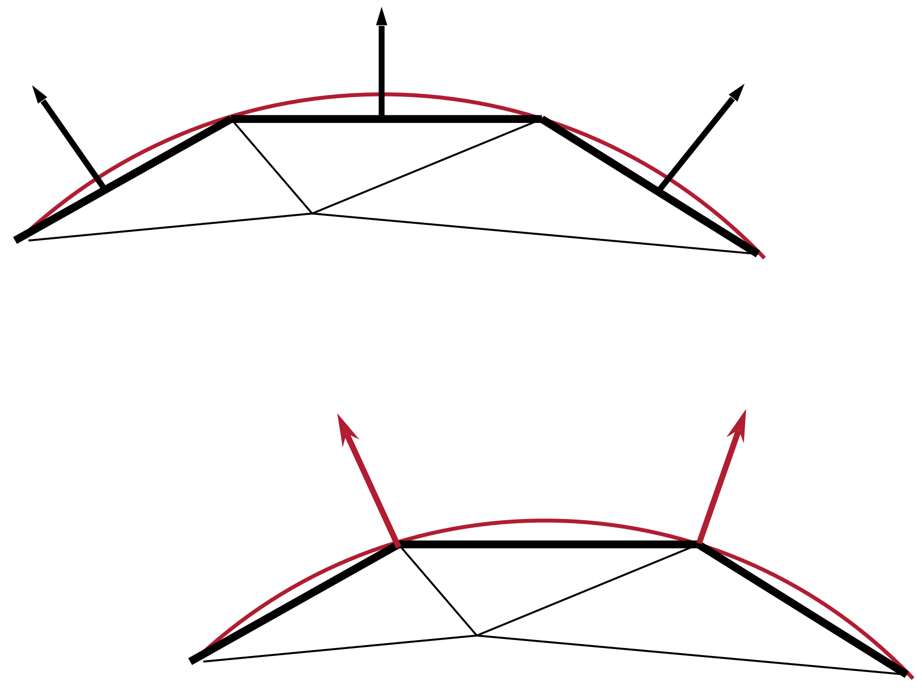
$$\|\mathbf{a}\| = \sqrt{{a_x}^2 + {a_y}^2 + {a_z}^2} = a$$

- Beweis:

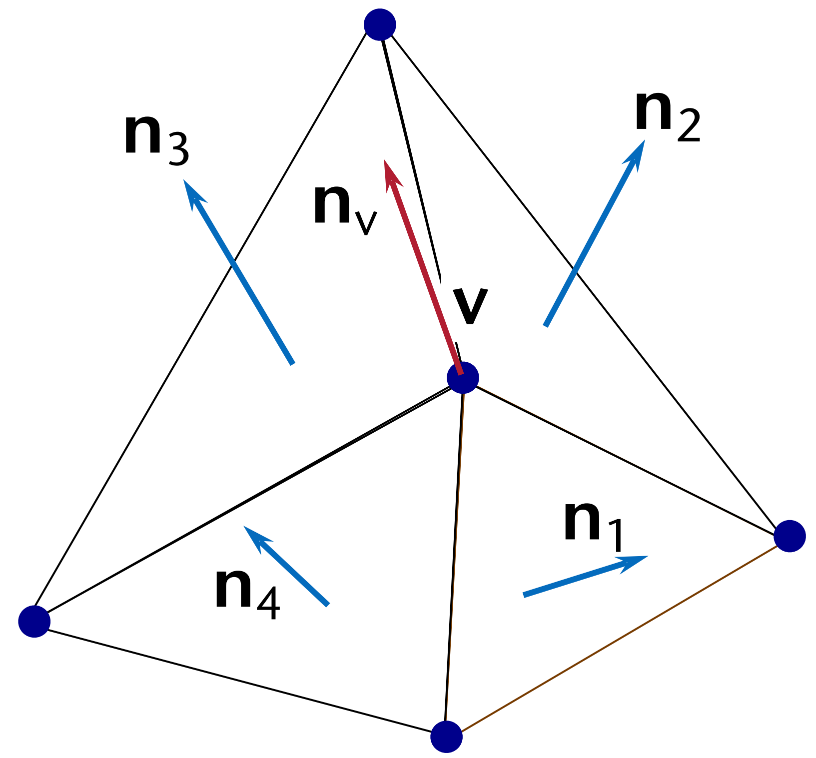
- Geometrische Interpretation der Vektor-Addition und Vektor-Subtraktion:



# Berechnung der Normalen der Eckpunkte eines 3D-Modells

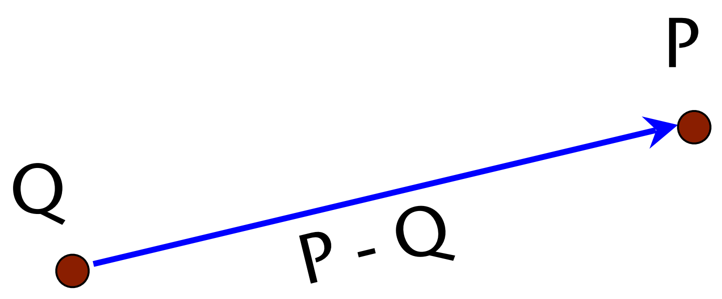


- Die Dreiecke bilden nur eine Annäherung an die wirkliche (unbekannte) Oberfläche eines Objektes
- An den Vertices hätte man gerne die Normale der ursprünglichen Fläche, nicht der Dreiecke!
- Algorithmus:
  1. Zu Beginn berechne eine Normale für jedes Polygon
  2. Bestimme für jeden Vertex, welche Polygone diesen enthalten (Inzidenz)
  3. Bestimme den Mittelwert der Normalen dieser angrenzenden Polygone
     - Einfach aufsummieren, dann normieren



# Unterschied zwischen Punkten und Vektoren

- Notation: Punkte mit normalen Großbuchstaben
- Achtung: Punkt ≠ Vektor !
- Unterschiedliche Bedeutung:
  - Punkt = Ort im Raum
  - Vektor = Richtung + Länge = Verschiebungsoperator (wirkt auf Punkte)
- Merkregeln:
  - Punkt + Vektor = Punkt
  - Vektor + Vektor = Vektor
  - Punkt - Punkt = Vektor (Notation: $\overline{QP}$ )
  - Punkt + Punkt = Nonsense!
  - Korrespondenz zwischen Punkt und Vektor mittels Ursprungspunkt $O$ :

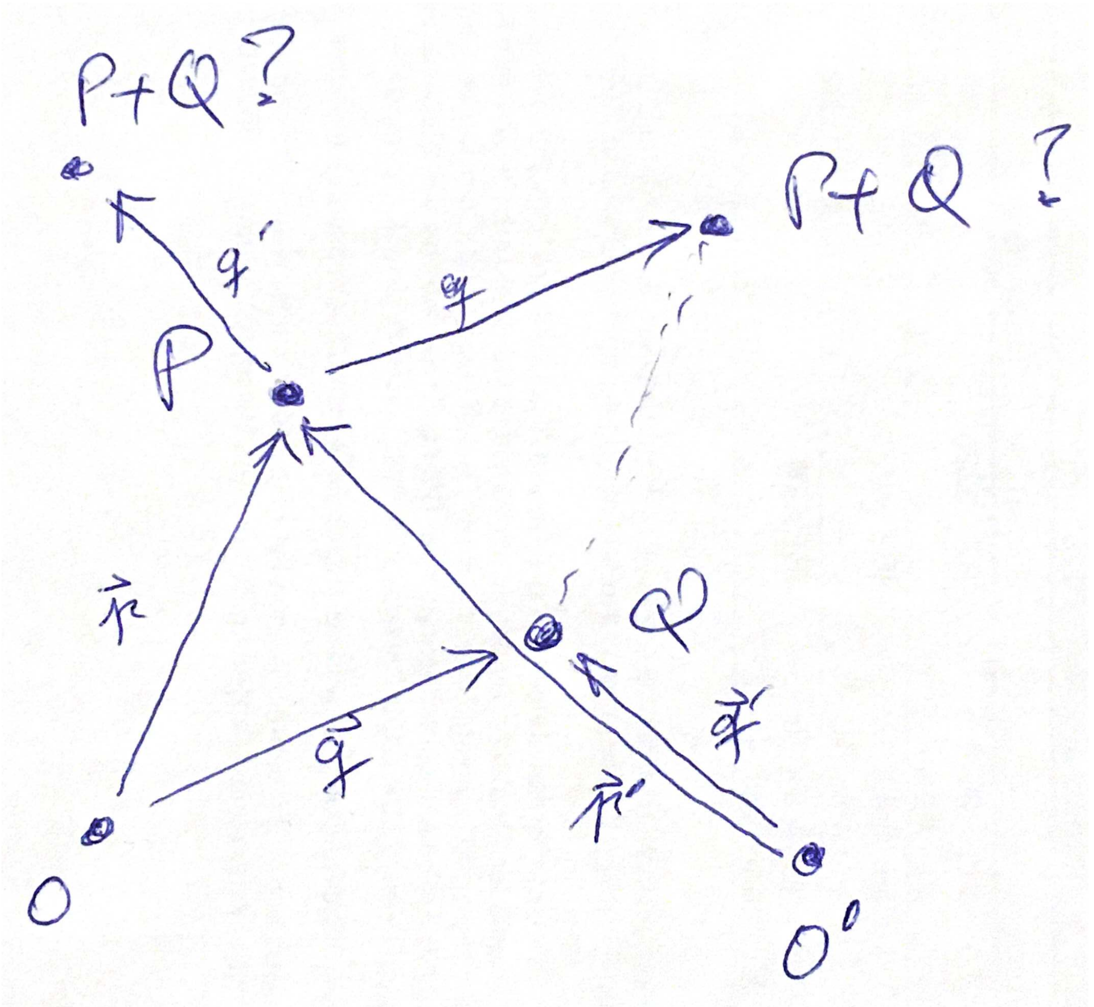



$$\mathbf{p} = P - O \qquad P = O + \mathbf{p}$$

**p** heißt Ortsvektor

# Warum eine Addition von Punkten sinnlos ist

**Just FYI**




Zumindest, wenn man einfach die Ortsvektoren addieren würde, wäre das Ergebnis nicht invariant bzgl der Wahl des Ursprungs!

Andere Argumentation: ein Additions-Operator auf Punkten müsste invariant gegenüber Verschiebung sein (sonst würden Beweise nicht nur von der relativen Lage der Punkte zueinander abhängen, sondern auch von der absoluten Lage im Raum!).
Betrachte nun zwei Punkte P, Q, und setze R = P + Q.

Erst Verschiebung, dann Addition:

$$\underbrace{(P+t)}_{\text{Verschiebung}} + (Q+t) = (P+Q) + 2t = R + 2t$$

Erst Addition, dann Verschiebung:

$$(P+Q) + t = R + t$$

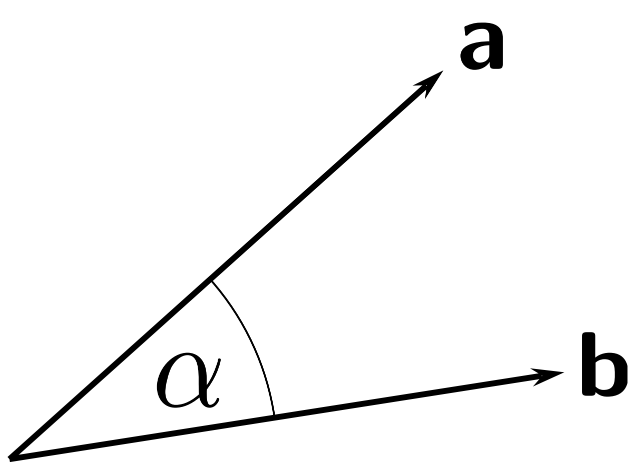
$\neq$

Haken bei der Argumentation: man macht hier schon Gebrauch von einer bestimmten Definition des Additions-Operators.
Übrigens: wenn man diese Argumentation akzeptiert, dann sieht man sehr schön, dass es bei einer baryzentrischen Kombination deswegen gut geht, weil dort die "partition of unity" gegeben ist.

# Das Skalarprodukt (*dot product*)

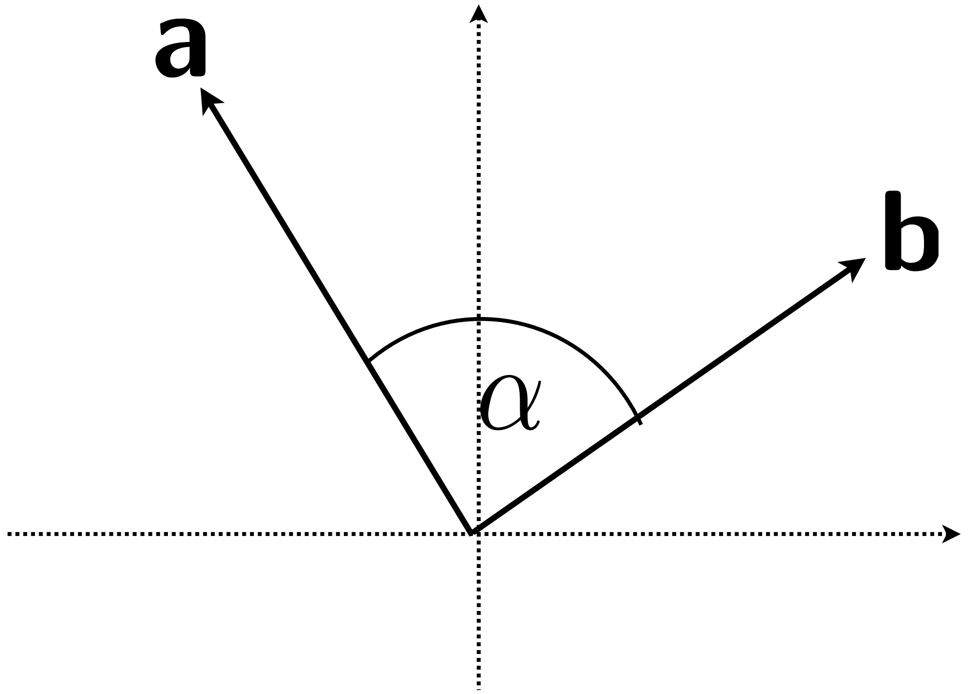
- Definition: $$\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z$$

- Eine geometrische Bedeutung:

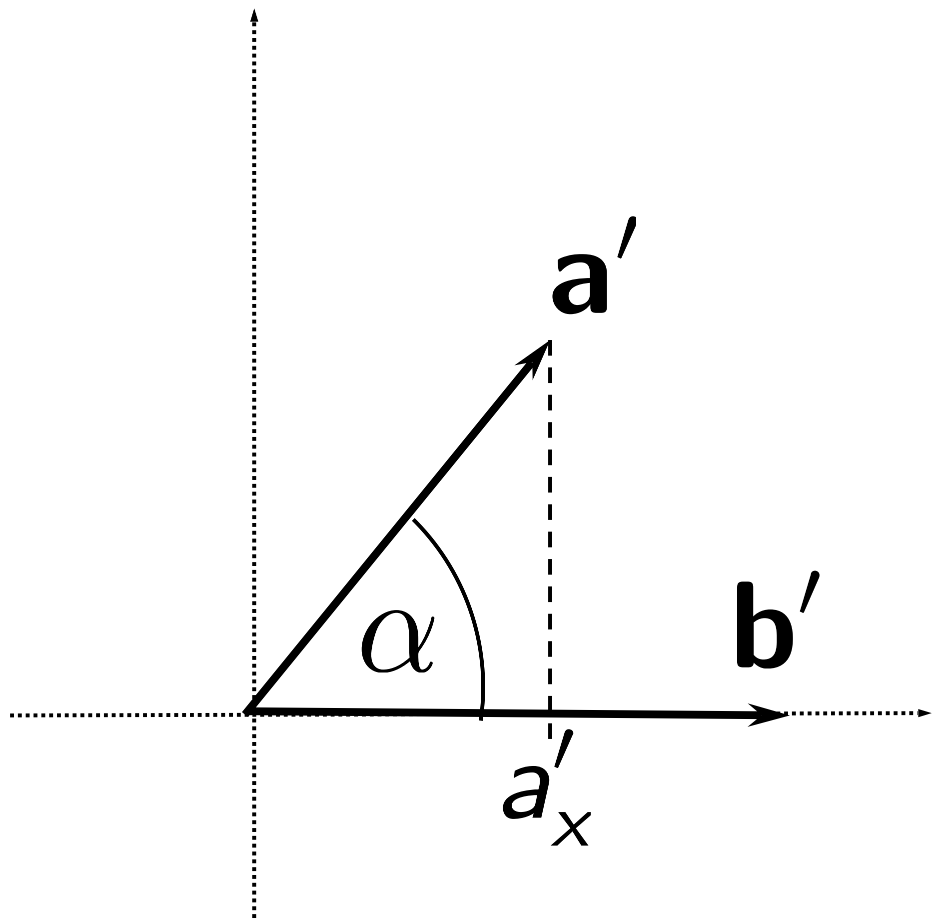



$$\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} = |\mathbf{a}|\cdot|\mathbf{b}|\cdot\cos\alpha$$

- Beweis (2D):
  - Sei $\theta_a$ = Winkel zwischen **a** und x-Achse
  - Damit ist $$\cos\alpha = \cos(\theta_a - \theta_b)$$ $$= \cos\theta_a\cos\theta_b + \sin\theta_a\sin\theta_b$$ $$= \frac{a_x}{|\mathbf{a}|}\frac{b_x}{|\mathbf{b}|} + \frac{a_y}{|\mathbf{a}|}\frac{b_y}{|\mathbf{b}|}$$



- Alternativer Beweis (*n*-dimensional):
  - Verbinde **a** und **b** starr miteinander
  - Rotiere beide so, dass **b** auf der x-Achse zu liegen kommt → **b'**, und **a** irgendwo in der xy-Ebene → **a'**
    (der Winkel $\alpha$ zwischen beiden bleibt unverändert)
  - Damit ist $\mathbf{a}^T\mathbf{b} = \mathbf{a}^T I \mathbf{b} = \mathbf{a}^T R^{-1} R\mathbf{b}$




$$= (\mathbf{a}^T R^T)(R\mathbf{b}) = (R\mathbf{a})^T(R\mathbf{b}) = \mathbf{a}' \cdot \mathbf{b}'$$

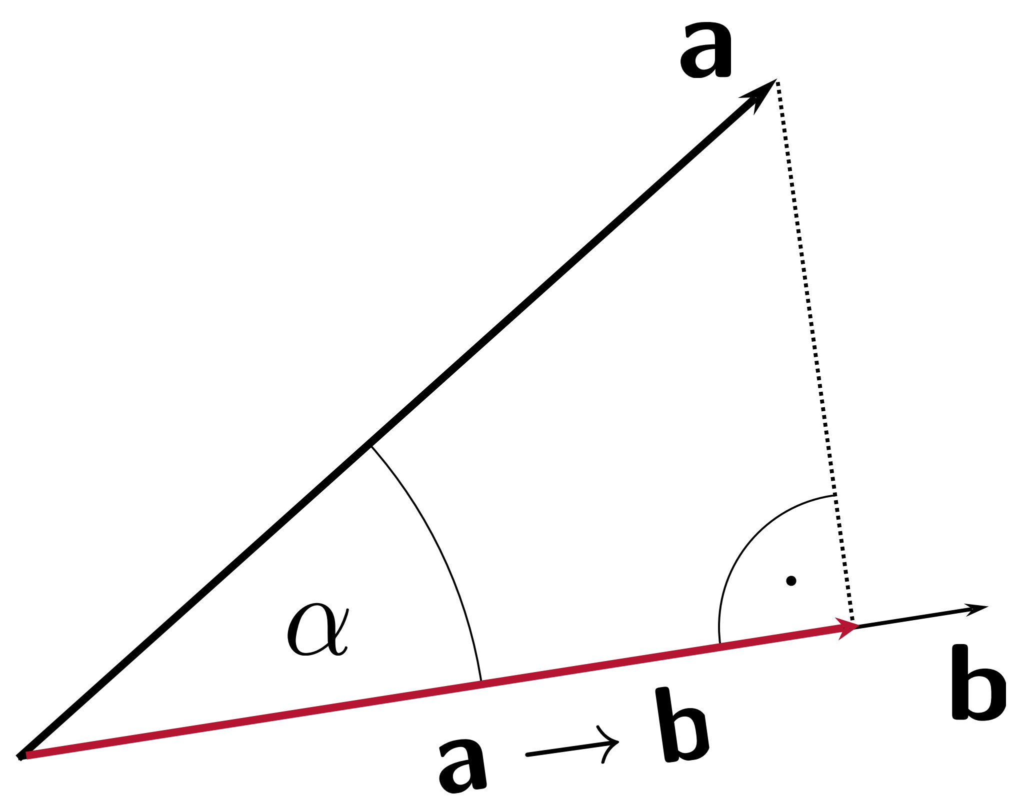
$$= \begin{pmatrix} a'_x & a'_y & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b'_x & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

$$= a'_x \cdot b'_x = |\mathbf{a}'| \cos\alpha \cdot |\mathbf{b}'| = \|\mathbf{a}\| \cdot \|\mathbf{b}\| \cos\alpha$$

# Weitere geometrische Bedeutung des Skalarproduktes

- Die senkrechte Projektion:

$$\left|\mathbf{a} \rightarrow \mathbf{b}\right| = \left|\mathbf{a}\right| \cdot \cos\alpha = \frac{\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}}{\left|\mathbf{b}\right|}$$




- Mit anderen Worten: das Skalarprodukt mit einem Einheitsvektor lässt sich als senkrechte Projektion auf diesen Einheitsvektor interpretieren;
  d.h., falls $\left|\mathbf{e}\right| = 1$
  dann ist $\left|\mathbf{a} \rightarrow \mathbf{e}\right| = \mathbf{a}\cdot\mathbf{e}$

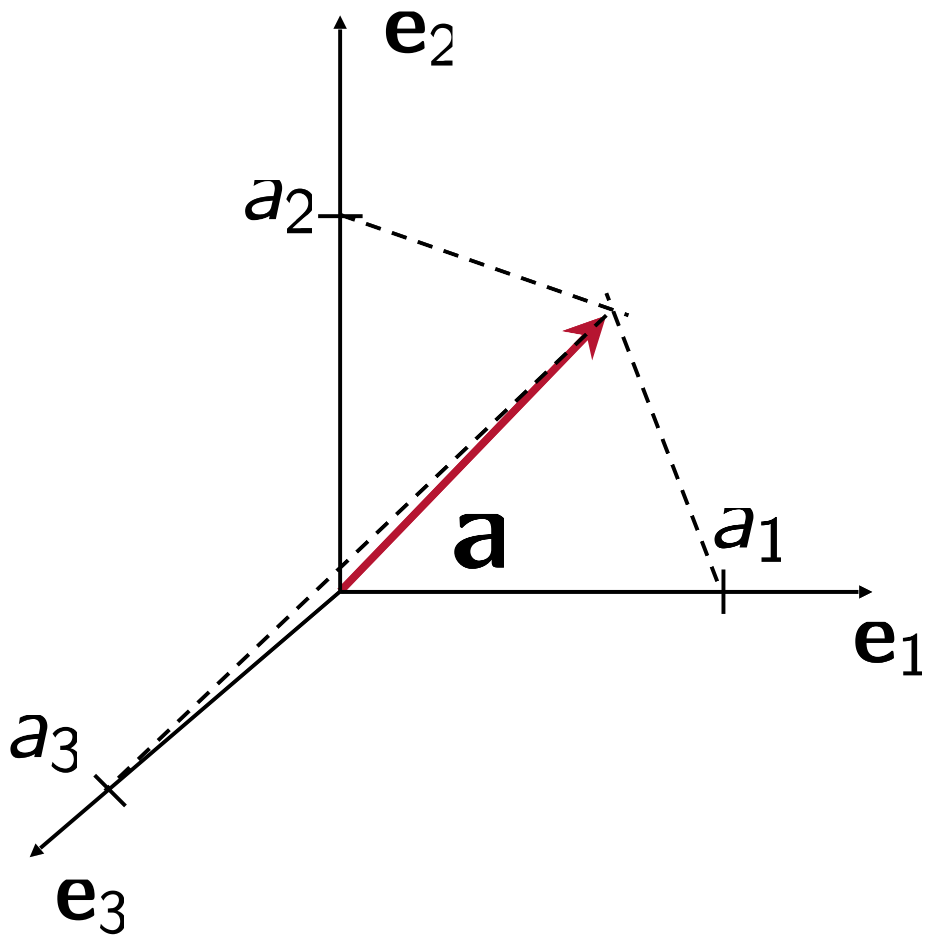
# Darstellung eines Vektors bzgl. einer orthogonalen Basis

- Wähle eine Basis $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ (Einheitsvektoren!)
- Berechne die Projektionen von **a** auf die Achsen:

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{e}_1 =: a_1$$

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{e}_2 =: a_2$$

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{e}_3 =: a_3$$




- Rückgewinnung von **a** aus den Koordinaten $(a_1, a_2, a_3)$:

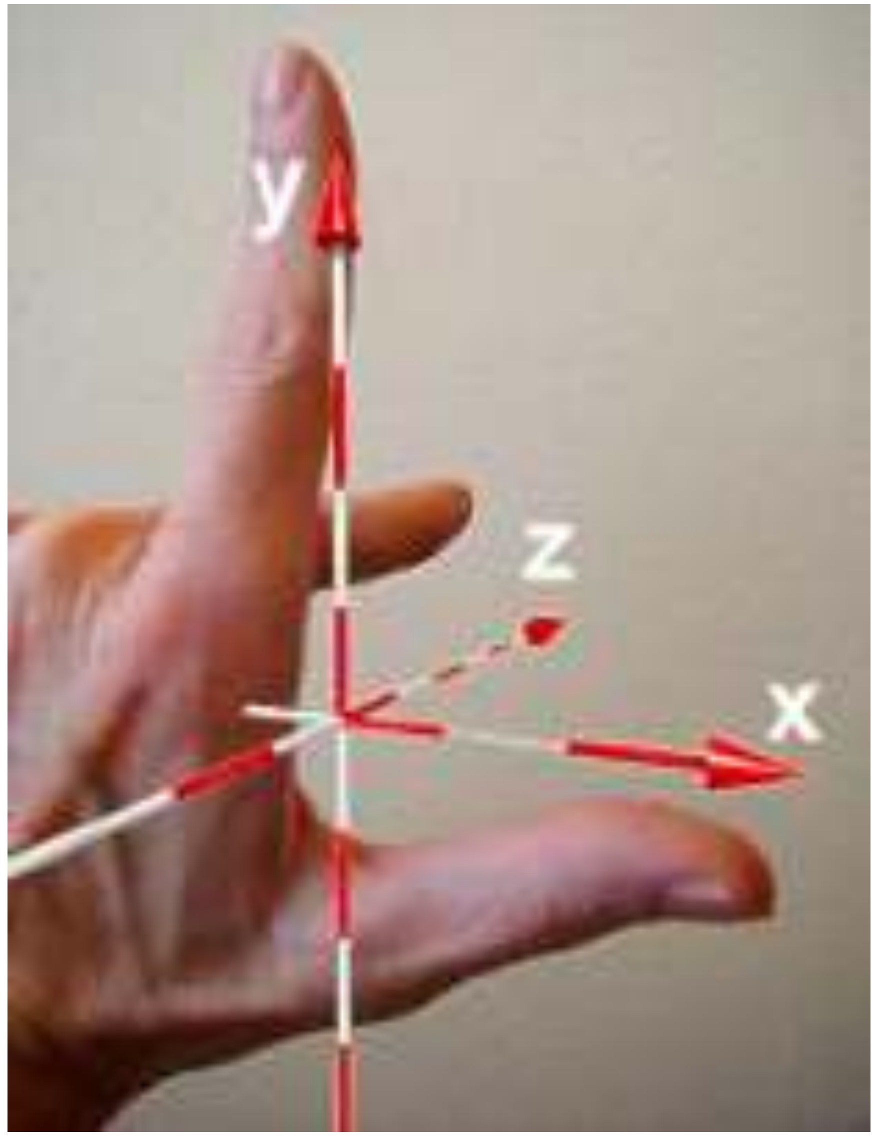
$$\mathbf{a} = a_1 \cdot \mathbf{e}_1 + a_2 \cdot \mathbf{e}_2 + a_3 \cdot \mathbf{e}_3 = \begin{pmatrix} \vdots & \vdots & \vdots \\ \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_3 \\ \vdots & \vdots & \vdots \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$$

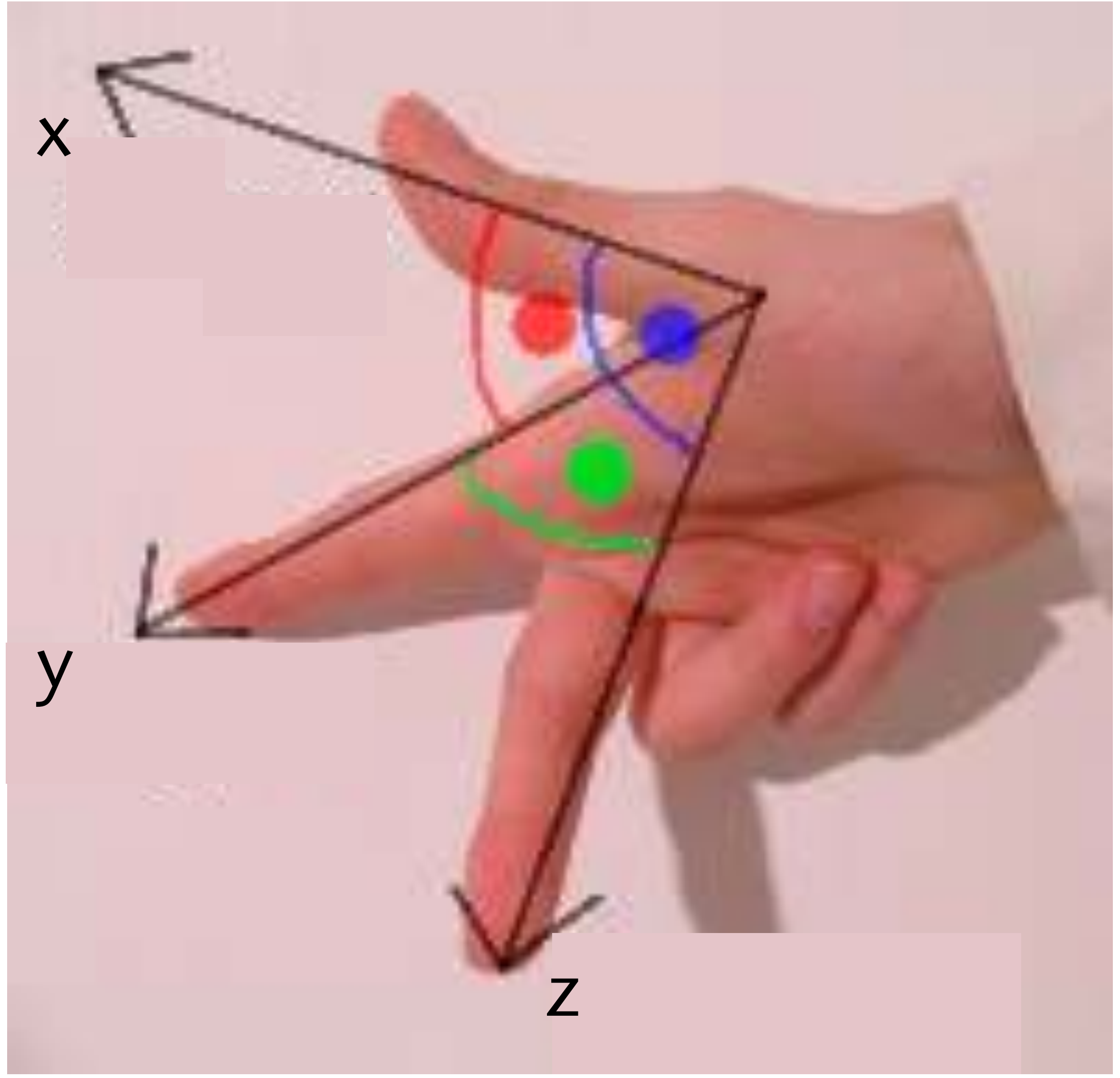
# Eine Konvention bei 3D-Koordinatensystemen

Conventional color coding:

X, Y, Z

Left handed system (Linkssystem)




Right handed system (Rechtssystem)

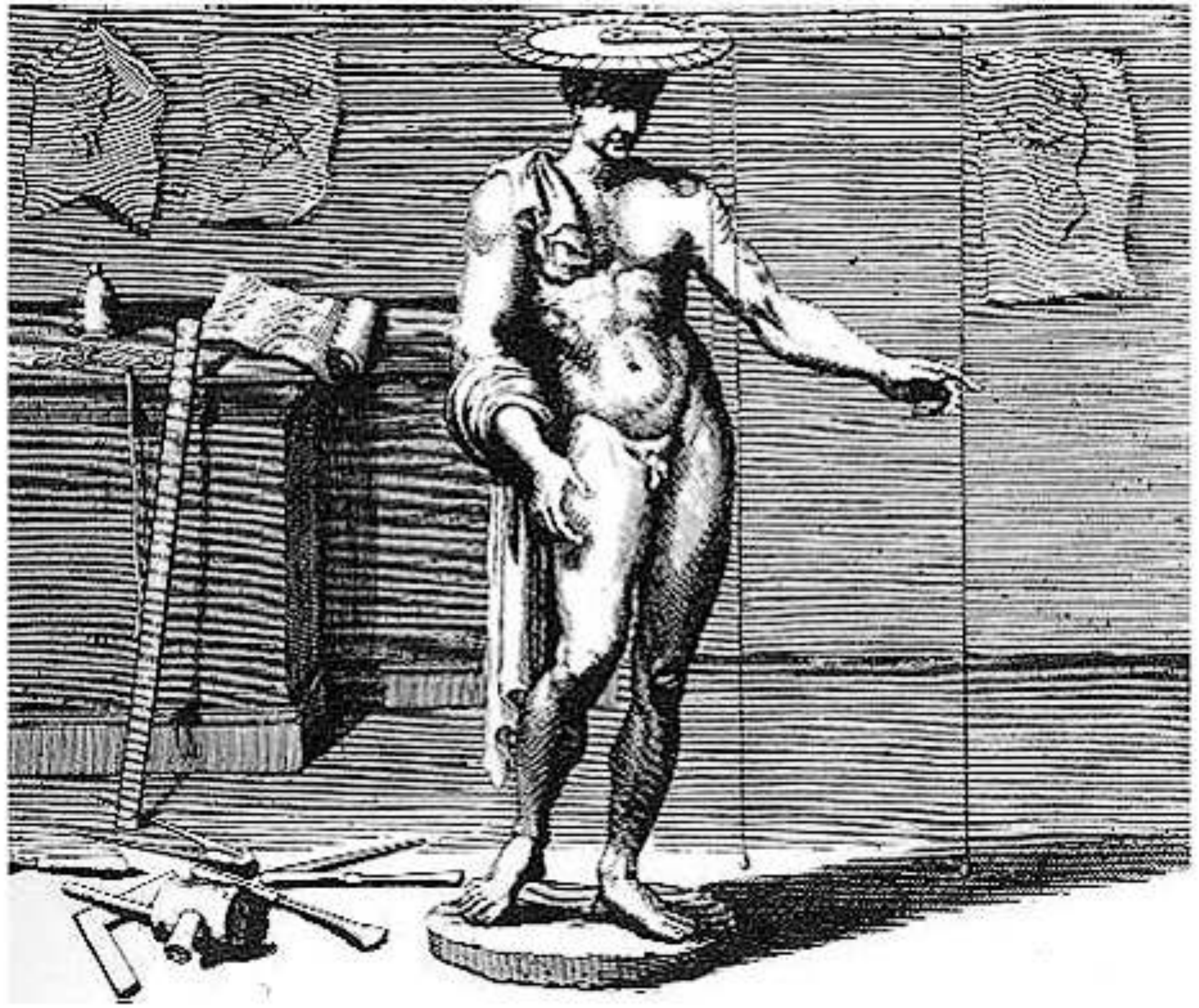
Achtung: wir verwenden *immer* das rechtshändige Koordinatensystem! (außer, es steht etwas anderes da)

# Leider verwenden nicht alle SW-Systeme diese Konvention :-(



# Das erste (?) Koordinatensystem


Alberti hat um 1450 Polarkoordinaten beschrieben und eine Karte von Rom in Form einer Tabelle der wichtigen Punkten der Stadt in seinem Buch *Descriptio Urbis Romae* veröffentlicht.



Alberti hat auch Zylinder-Koordinaten beschrieben (in seinem Buch *De Statua*), und eine Vorrichtung, das *finitorium*, mit dem man Statuen "einscannen" und kopieren könnte.

# Anwendungsbsp.: Umkugel um 3 Kugeln

# Ungleichungen

- Dreiecksungleichung:

$$\|\mathbf{a}+\mathbf{b}\| \leq \|\mathbf{a}\| + \|\mathbf{b}\|$$

- Schwarz'sche Ungleichung:

$$|\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}| \leq \|\mathbf{a}\|\cdot\|\mathbf{b}\|$$

# Das Kreuzprodukt (*cross product*)

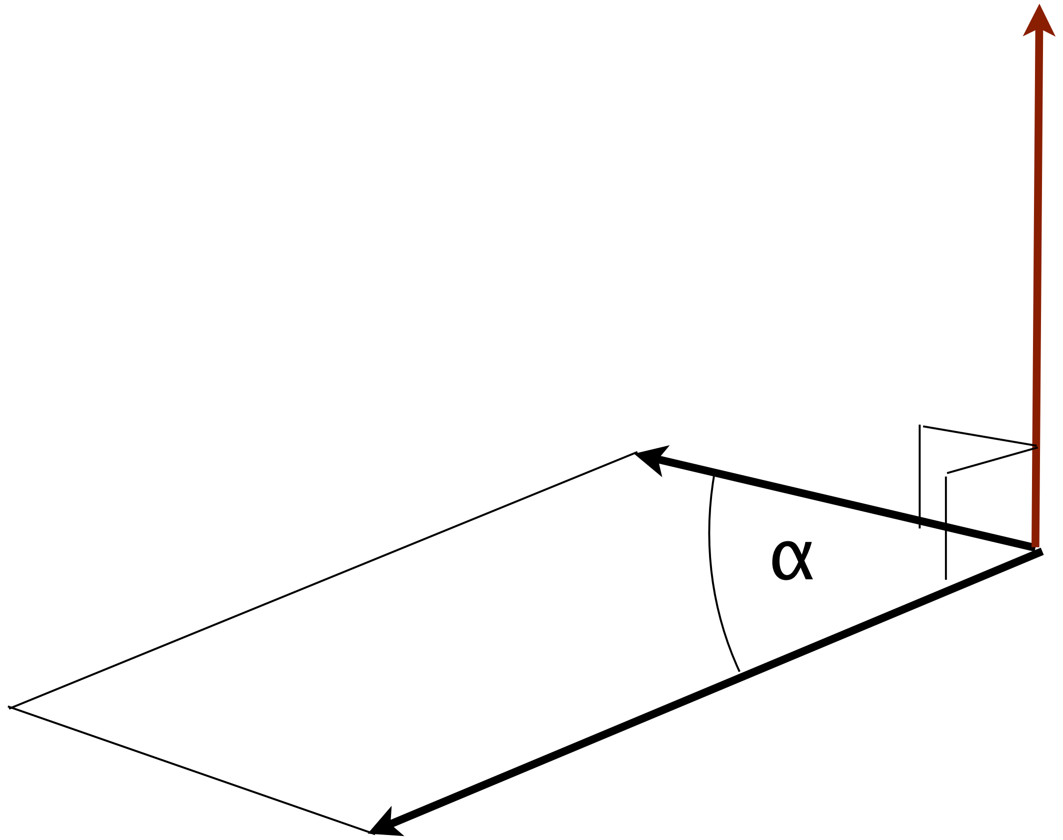
- Definition in 3D:

$$\mathbf{c} = \mathbf{a} \times \mathbf{b} = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_y b_z - a_z b_y \\ a_z b_x - a_x b_z \\ a_x b_y - a_y b_x \end{pmatrix}$$

- Ergebnis ist ein Vektor,
  der senkrecht auf beiden Vektoren steht

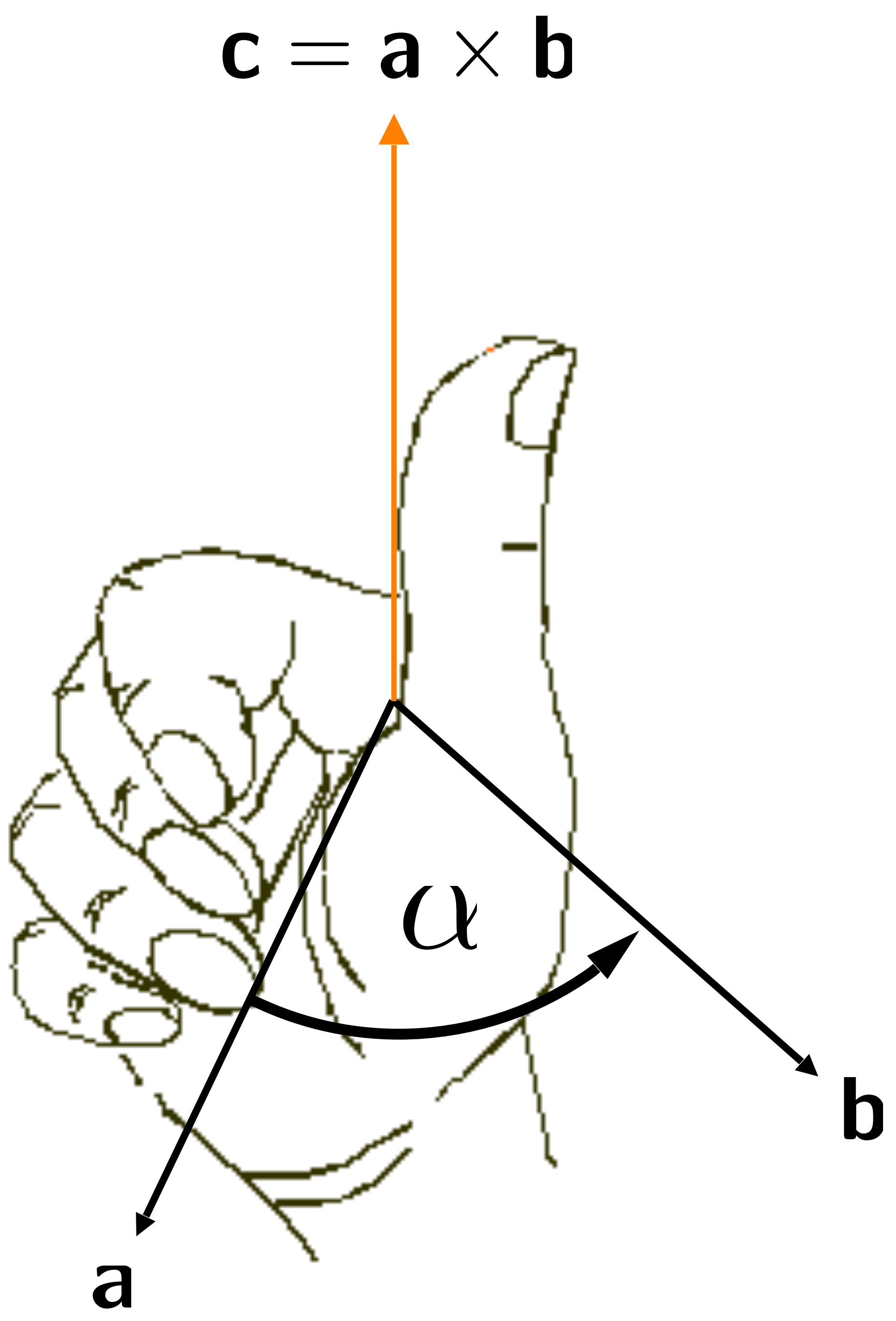
- Länge des Vektors = Flächeninhalt des von
  **a** und **b** aufgespannten Parallelogramms:

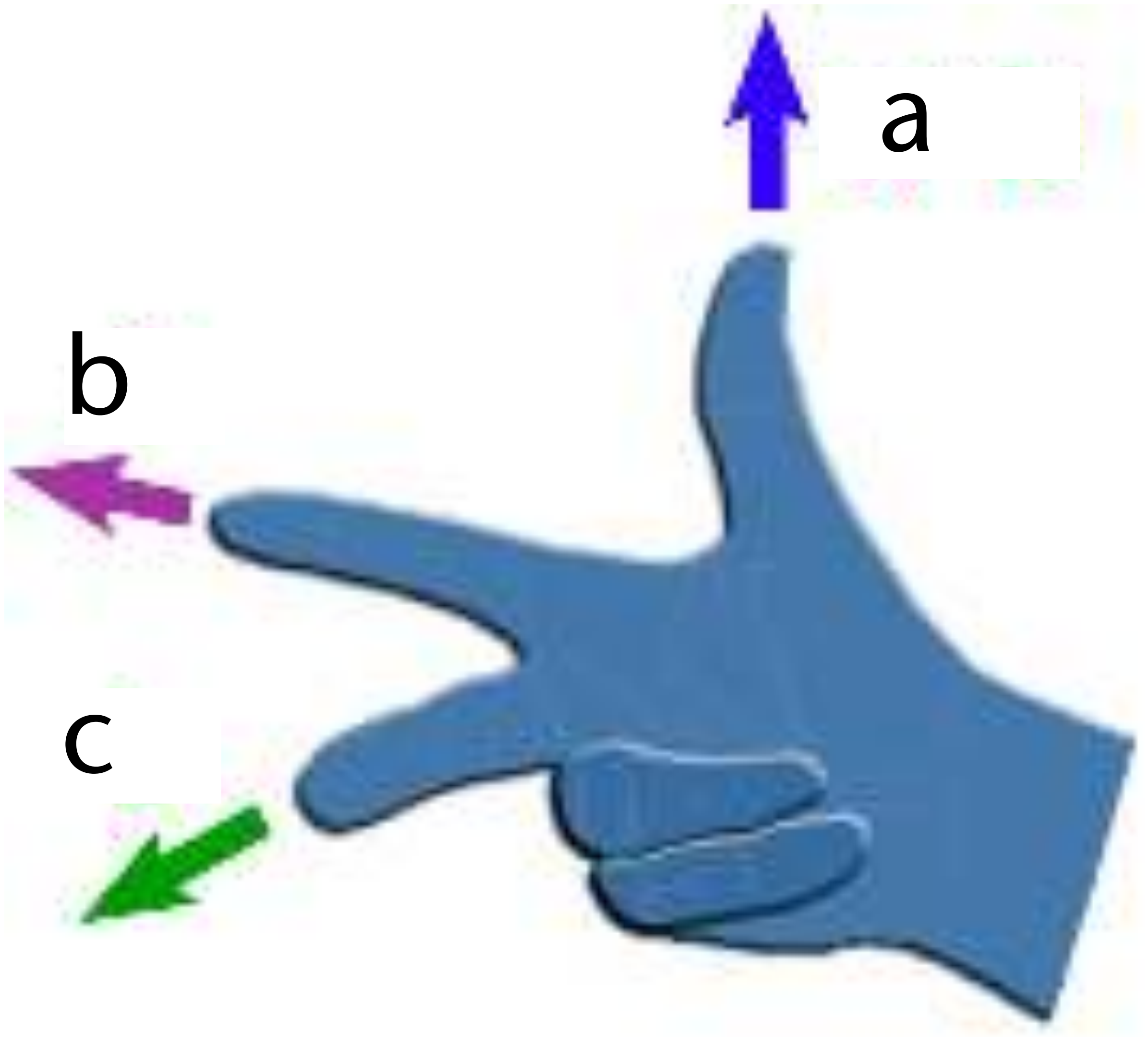
$$|\mathbf{c}| = |\mathbf{a} \times \mathbf{b}| = |\mathbf{a}| \cdot |\mathbf{b}| \cdot \sin\alpha$$



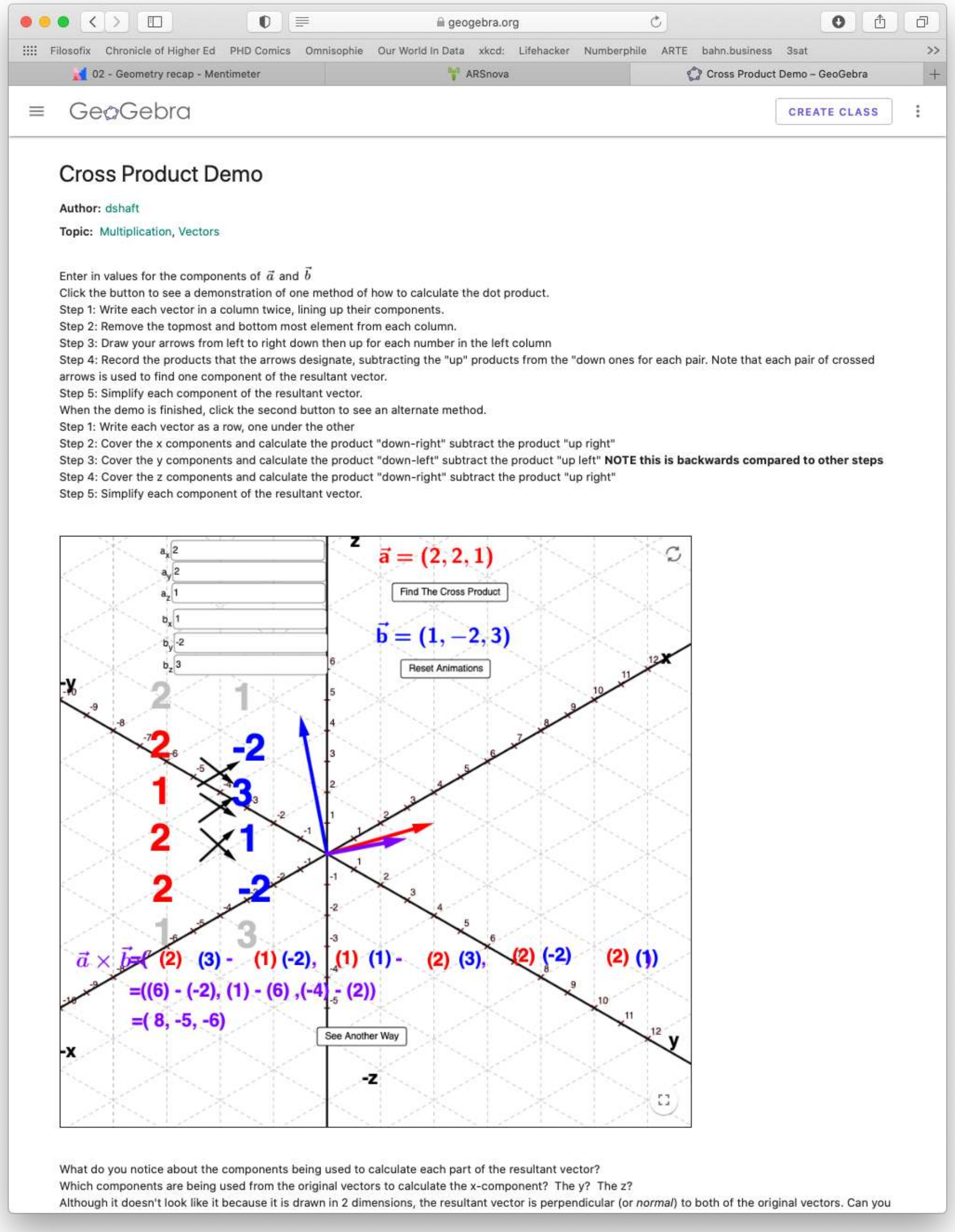

- Nützlich zur Erstellung von
  Koordinatensystemen (später mehr)

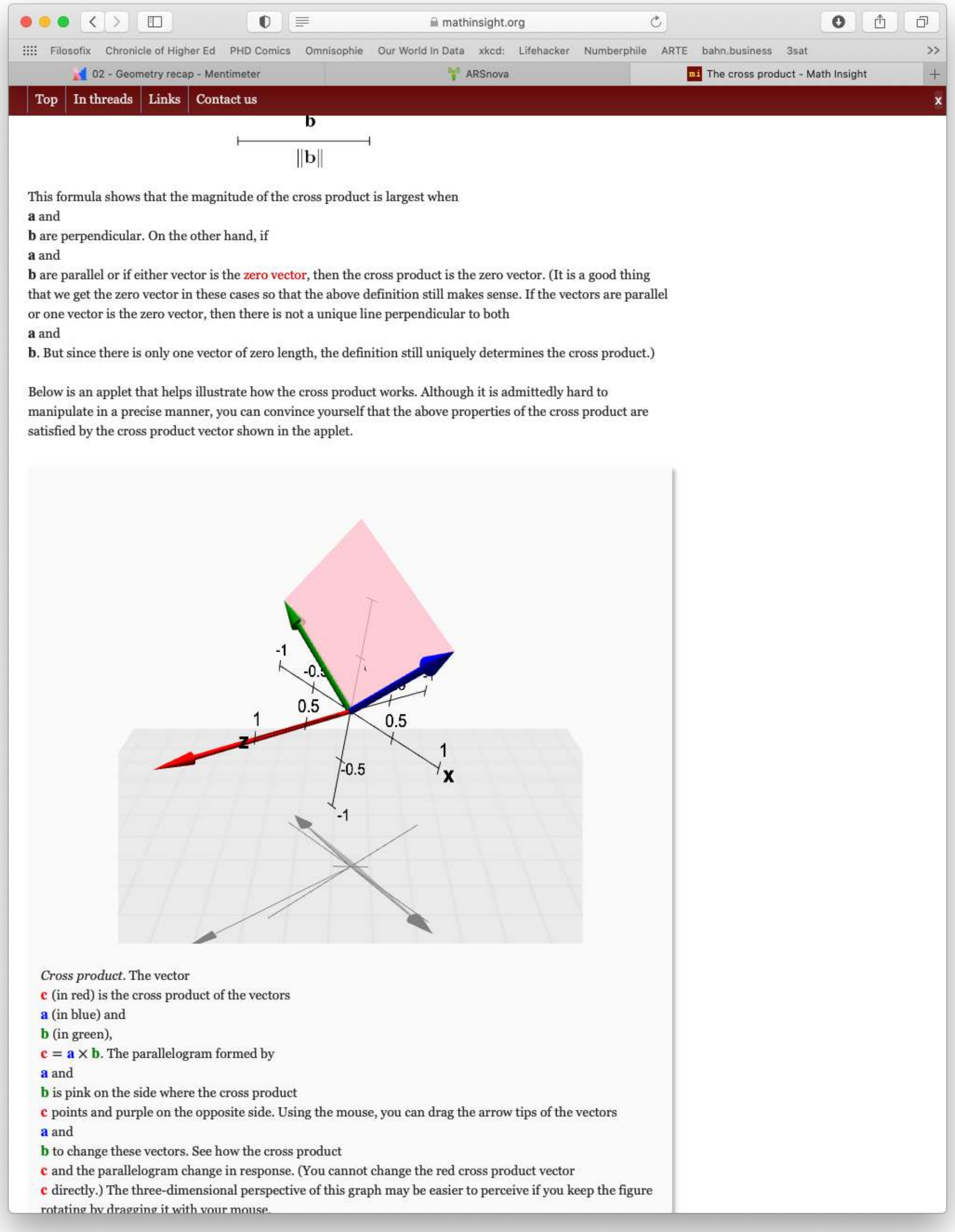
- Eselsbrücke: Rechte-Hand-Regeln



# Demo





https://www.geogebra.org/m/KjAfKEpr

https://mathinsight.org/cross_product

# Beispiele zur Motivation für folgende Rechnung

- Kamera-Koordinatensystem:
  - Gegeben: ein Viewpoint (virtuelle Kamera) und eine (Haupt-)Blickrichtung oder ein "Center of Interest"
  - Gesucht: ein Koordinatensystem mit x = "rechts", y = "oben", z = view dir.
- Billboards:
  - Gegeben: Dreieck (Mittelpunkt des Dreiecks), Viewpoint
  - Gesucht: Koordinatensystem mit Ursprung im Dreiecksmittelpunkt, z-Achse Richtung Viewpoint, und x,y senkrecht dazu (egal in welche Richtung)

# Konstruktion eines Koordinatensystems

*FYI:*
*Die Verallgemeinerung im n-dim. Vektorraum heißt Gram-Schmidt-Verfahren*

- Häufige Aufgabe:
  - Ein Vektor **a** ist gegeben (z.B. Blickrichtung)
  - Erstelle dazu eine Orthonormalbasis
- Nicht eindeutig, aber oft genügt *irgendeine* Orthonormalbasis
- Algorithmus:
  1. Setze $\mathbf{w} = \frac{\mathbf{a}}{|\mathbf{a}|}$
  2. Für **u** und **v** benötigen wir irgend einen Vektor **t** , der nicht kollinear zu $\mathbf{w}$ ist; z.B. setze **t** := **w**, und ersetze die betragsmäßig kleinste Komponente durch 1
  3. Setze $\mathbf{u} = \frac{\mathbf{t} \times \mathbf{w}}{|\mathbf{t} \times \mathbf{w}|}$ $\quad \mathbf{v} = \mathbf{w} \times \mathbf{u}$

# Eigenschaften des Kreuzproduktes

- Einfache Eigenschaften:

$$\mathbf{x} \times \mathbf{y} = +\mathbf{z} \quad \mathbf{y} \times \mathbf{z} = +\mathbf{x} \quad \mathbf{z} \times \mathbf{x} = +\mathbf{y}$$

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = -\mathbf{b} \times \mathbf{a}$$ (antikommutativ / schiefsymmetrisch)

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = 0 \;\Leftrightarrow\; \mathbf{a} = \lambda \mathbf{b}$$

$$\mathbf{a} \times (\mathbf{b} + \mathbf{c}) = \mathbf{a} \times \mathbf{b} + \mathbf{a} \times \mathbf{c}$$ (distributiv)

$$\mathbf{a} \times (k\mathbf{b}) = k\,(\mathbf{a} \times \mathbf{b})$$ (linear)

- Es gilt die Jacobi-Identität:

$$\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) + \mathbf{b} \times (\mathbf{c} \times \mathbf{a}) + \mathbf{c} \times (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) = 0$$

- Es gilt **nicht** die Assoziativität!

$$\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) \neq (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \times \mathbf{c}$$

- Es gilt **nicht** das Auslöschungsgesetz!

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \mathbf{a} \times \mathbf{c} \not\Rightarrow \mathbf{b} = \mathbf{c}$$

- Zusammenhang zwischen den Beträgen von Kreuz- und Skalarprodukt:

$$\|\mathbf{a} \times \mathbf{b}\|^2 + (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})^2 = |\mathbf{a}|^2 |\mathbf{b}|^2$$

# Exkurs

FYI

- Das Kreuzprodukt lässt sich auch als Matrix-Vektor-Produkt schreiben
  - Definiere dazu die zum Vektor **a** duale (schiefsymmetrische) Matrix $\mathbf{a}^{\times}$ :

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \mathbf{a}^{\times} \cdot \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 0 & -a_z & a_y \\ a_z & 0 & -a_x \\ -a_y & a_x & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{pmatrix}$$

- Die Darstellung mit schiefsymmetrischer Matrix hat viele Vorteile, u.a.:
  - $\mathbf{a}^{\mathsf{T}} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) \neq (\mathbf{a}^{\mathsf{T}} \cdot \mathbf{b}) \times \mathbf{c}$ aber $\mathbf{a}^{\mathsf{T}} \cdot (\mathbf{b}^{\times} \cdot \mathbf{c}) = (\mathbf{a}^{\mathsf{T}} \cdot \mathbf{b}^{\times}) \cdot \mathbf{c}$
  - $\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) \neq (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \times \mathbf{c}$ aber $\mathbf{a}^{\times}(\mathbf{b}^{\times}\mathbf{c}) = (\mathbf{a}^{\times}\mathbf{b}^{\times})\mathbf{c}$
- Fazit: bei der Schreibweise mit schief-symmetrischer Matrix $\mathbf{a}^{\times}$ gilt die Assoziativität!

- Warum ist $\mathbf{a}^\times(\mathbf{b}^\times\mathbf{c}) = (\mathbf{a}^\times\mathbf{b}^\times)\mathbf{c}$ ,
  aber trotzdem $\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) \neq (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \times \mathbf{c}$ ?
- Weil $(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \times \mathbf{c}$ äquivalent zum Ausdruck $(\mathbf{a} \times \mathbf{b})^\times\mathbf{c}$ ist,
  aber die Matrix $(\mathbf{a} \times \mathbf{b})^\times$ verschieden ist von der Matrix $\mathbf{a}^\times\mathbf{b}^\times$
- Hintergrund:
  - Beim Ausdruck $\mathbf{a}^\times\mathbf{c}$ wird die Matrix $\mathbf{a}^\times$ als konstant betrachtet und ist eine lineare Abbildung, die auf den (variablen) Vektor **c** wirkt
  - Dasselbe gilt für den Ausdruck $\mathbf{a} \times \mathbf{c}$ : wenn **a** konstant ist, ist das ein linearer Ausdruck in den Koordinaten von **c**
  - Lineare Abbildungen, die hintereinander ausgeführt werden, ergeben wieder eine lineare Abbildung

# Das Tripel-Kreuzprodukt FYI

- Zusammenhang zwischen Kreuzprodukt und Skalarprodukt:

$$\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = \mathbf{b}\,(\mathbf{a}\cdot\mathbf{c}) - \mathbf{c}\,(\mathbf{a}\cdot\mathbf{b})$$

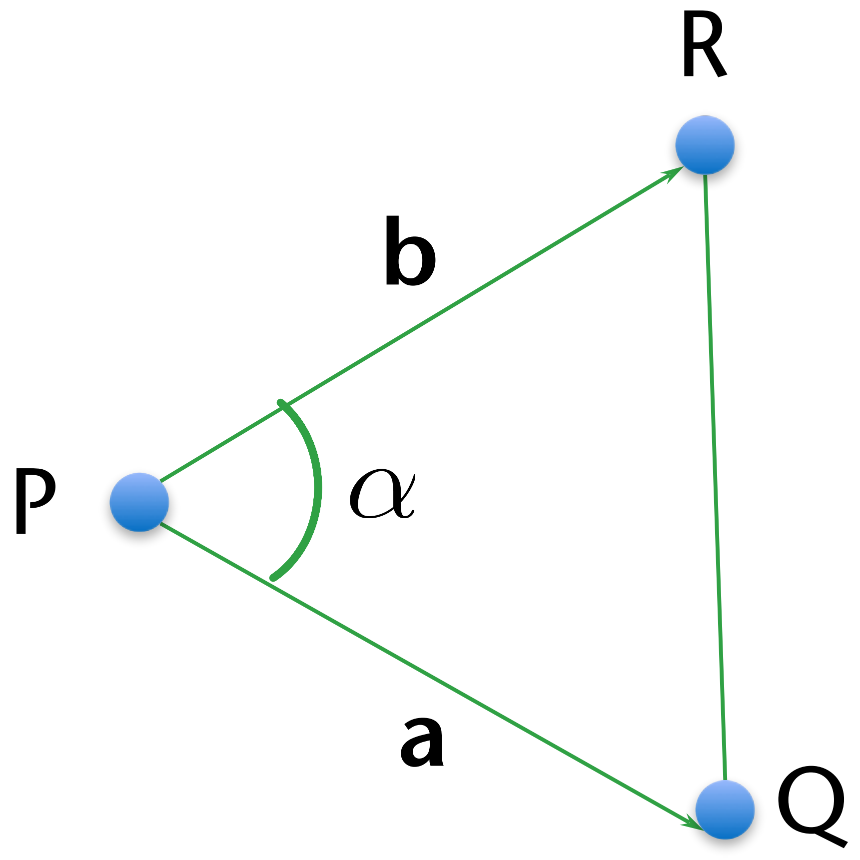
- Heißt auch *"triple product expansion", "triple cross product identity"* oder Graßmann-Identität oder Graßmannscher Entwicklungssatz
  - Eselsbrücke: "ABC = BAC- CAB" ("erst backen, dann kappen")
  - Oder: alle zyklischen Permutationen von A,B,C

# Flächeninhalte

- Flächeninhalt eines Dreiecks:

$$A(\triangle PQR) = \frac{1}{2} \|\mathbf{a}\| \cdot \|\mathbf{b}\| \sin\alpha$$

$$= \frac{1}{2} \|\mathbf{a} \times \mathbf{b}\|$$




- Erweiterung: Flächeninhalt mit Vorzeichen

$$A(\triangle PQR) = \begin{cases} \frac{1}{2} \|\mathbf{a} \times \mathbf{b}\| &, \ P, Q, R \text{ gegen Uhrzeigersinn} \\ -\frac{1}{2} \|\mathbf{a} \times \mathbf{b}\| &, \ P, Q, R \text{ im Uhrzeigersinn} \end{cases}$$

  - Achtung: ist eine reine Konvention / Definition – sie ist in keiner Weise der Geometrie inhärent! (aber eine sehr praktische Konvention, macht aber so nur in 2D Sinn!)

- Satz ("SPQR-Satz"):

  Sei PQR ein Dreieck und S ein beliebiger Punkt in derselben Ebene.

  Dann gilt:

$$A(\triangle PQR) = A(\triangle SPQ) + A(\triangle SQR) + A(\triangle SRP)$$

- Bezeichnung: $\square PQRS$ = Viereck ( *quadrangle, quadrilateral*)

# Beweis

1. Fall: $S$ liegt im Inneren des Dreiecks

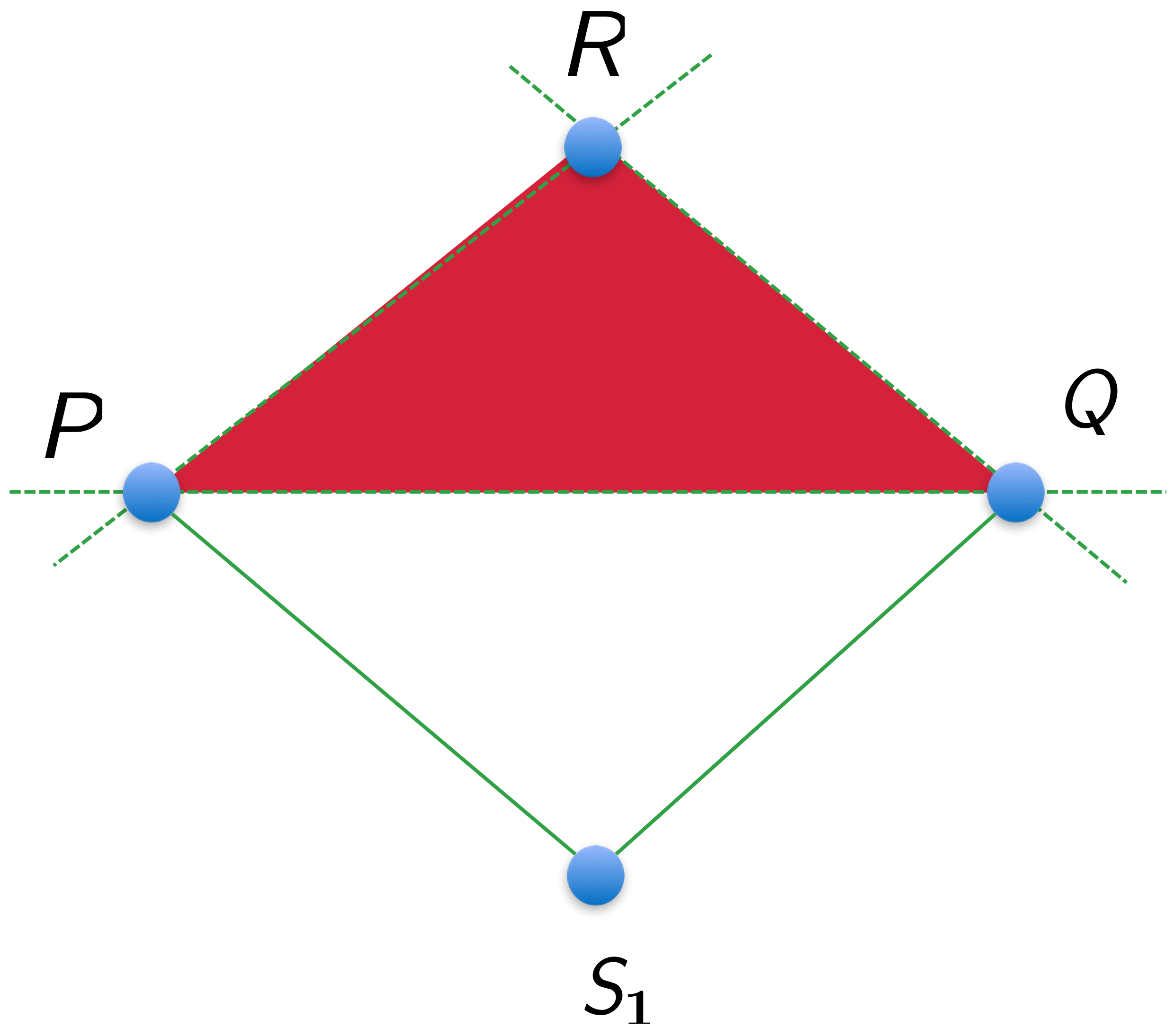
   → Behauptung ist klar

2. Fall: $S$ liege außerhalb des Dreiecks

   - Annahme: $S = S_1$
   - Klar ist:

$$A(\triangle PQR) = A(\square PSQR) - A(\triangle SQP)$$

⇒ Behauptung



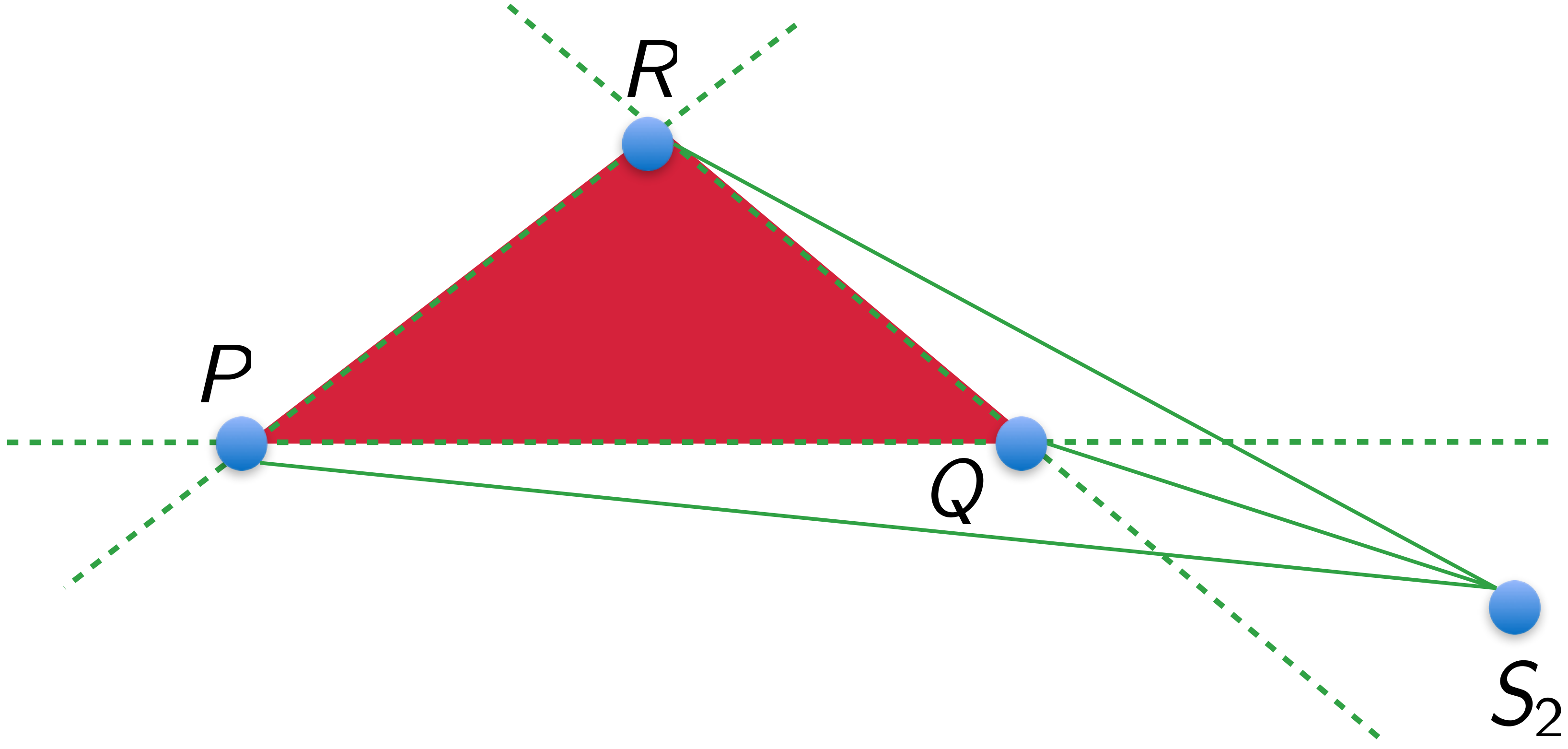
# 3. Fall: $S = S_2$

- Dann ist $A(\triangle PQR) = A(\triangle SRP) - A(\triangle SQP) - A(\triangle SRQ)$

  und $A(\triangle SPQ) < 0$

  und $A(\triangle SQR) < 0$

  $\Rightarrow$ Behauptung




- Falls $S$ in einer der anderen Regionen liegt, folgt die selbe Behauptung durch Umbenennen der Ecken des Dreiecks

# Flächeninhalt als Determinante

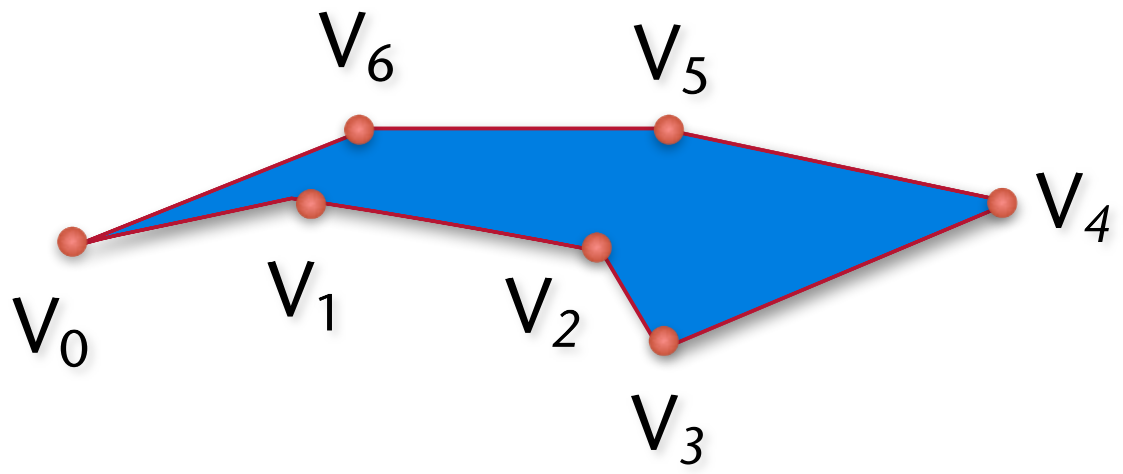
- Eine alternative Berechnung des Flächeninhaltes eines Dreiecks:

$$A(\triangle PQR) = \frac{1}{2} \det \begin{pmatrix} P_x & P_y & 1 \\ Q_x & Q_y & 1 \\ R_x & R_y & 1 \end{pmatrix} , \qquad P, Q, R \in \mathbb{R}^2$$

- Beweisskizze:
  - $P$, $Q$, $R$ in $\mathbb{R}^3$ einbetten mit jew. $z = 0$
  - Determinante vergleichen mit der z-Komponente von $(Q - P) \times (R - P)$

# Polygone

- Definition: ein Polygon ist ein geometrischer Graph P=($V$, $E$), mit Knoten $V = \{V_0, V_1, \ldots, V_{n-1}\} \subset \mathbb{R}^d$, $d \geq 2$, und Kanten $E = \{ (V_0,V_1), \ldots, (V_{n-1}, V_0) \}$, so dass alle Knoten in *einer* Ebene liegen.
  - Die Knoten werden (engl.) vertices (sg. vertex) genannt




- Fast immer verlangen wir (nehmen wir an), dass das Polygon einfach ist = der Schnitt zweier Kanten aus $E$ ist entweder leer oder genau einer der Vertices aus $V$, und dass jeder Vertex zu genau zwei Kanten inzident ist (d.h., keine Selbstschnitte, keine "losen Kanten")

# Fläche eines Polygons

- Definition (Ohr):

  Sei $V^1, \ldots, V^n$ ein überschneidungsfreies Polygon in einer Ebene.

  Eine Ecke $V^i$ heißt "Ohr" gdw. die Strecke $V^{i-1}V^{i+1}$ komplett im Inneren des Polygons liegt.

- Satz (ohne Beweis):

  Jedes überschneidungsfreie Polygon in einer Ebene hat mindestens 2 Ohren.

- Satz (Fläche eines Polygons):

  Für jedes geschlossene, überschneidungsfreie Polygon $V^1, \ldots, V^n$ und einen beliebigen Punkt $P$ in der Ebene gilt:

$$A(\text{Polygon}) = \sum_{i=1}^{n} A(\triangle P V^i V^{i+1}) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} V_x^i V_y^{i+1} - V_y^i V_x^{i+1}$$

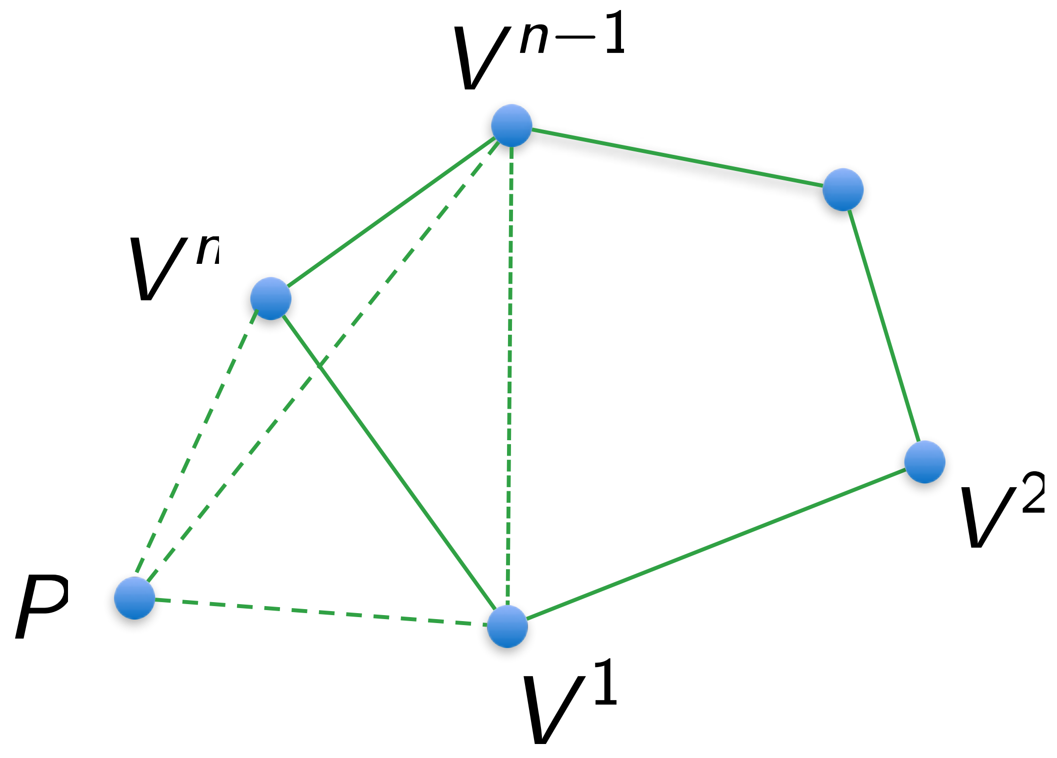
- Beweis: Teil 1
  - Induktionsanfang: $n = 3$
    Aus SPQR-Satz $\Rightarrow$ $A = A(PV^1V^2) + A(PV^2V^3) + A(PV^3V^1)$

- Induktionsschritt: $n > 3$

  o.B.d.A. ist $V^n$ = Ohr

  (sonst die $V^i$ umnummerieren)

  Nun gilt:



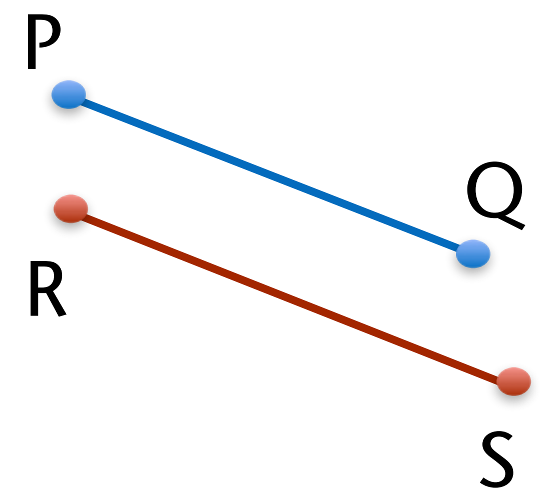

$$A = \underbrace{\sum_{i=1}^{n-2} A\left(PV^iV^{i+1}\right) + A\left(PV^{n-1}V^1\right)}_{\text{Induktionsvoraussetzung}} + \underbrace{A\left(V^1V^{n-1}V^n\right)}_{= \, A\left(PV^1V^{n-1}\right) + A\left(PV^{n-1}V^n\right) + A\left(PV^nV^1\right)}$$

$\Rightarrow$ Behauptung

# Geometrische Prädikate ("Tests")

- Ein geometrisches Prädikat ist eine Formel / ein Algorithmus, die erfüllt ist / der "wahr" liefert, wenn eine bestimmte geometrische Bedingung erfüllt ist.

- Beispiel: sind zwei Kanten $\overline{PQ}$ und $\overline{RS}$ parallel?




- Lösungen:
  1. $\overline{PQ}$ parallel zu $\overline{RS} \Leftrightarrow (Q-P)\times(S-R)=0$
  2. $\overline{PQ}$ parallel zu $\overline{RS} \Leftrightarrow \dfrac{(Q-P)}{\|(Q-P)\|}\cdot\dfrac{(S-R)}{\|(S-R)\|}=1$
  3. Weitere?

- Beachte die numerische Robustheit!

# Beispiel: schneiden sich zwei koplanare Kanten?

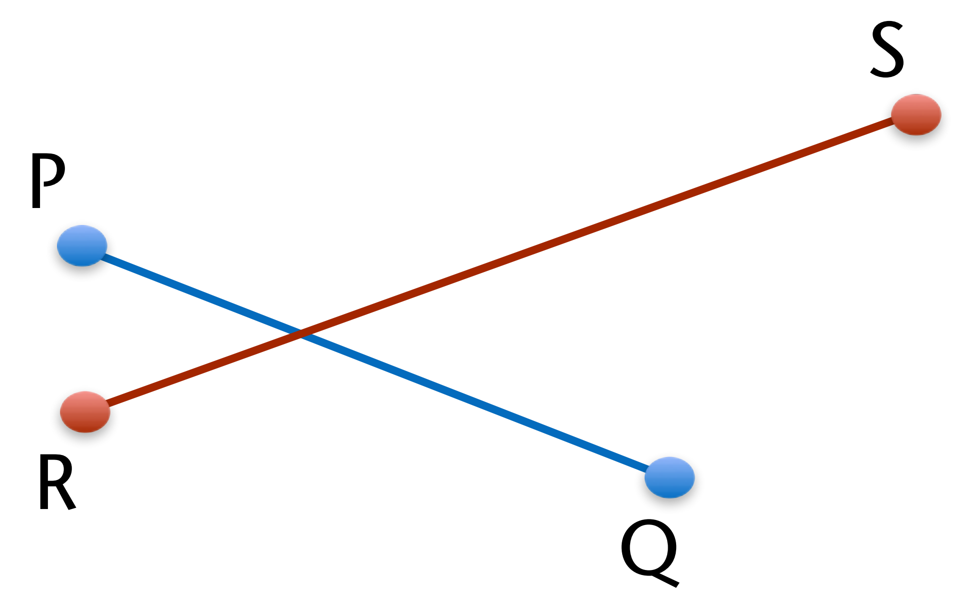
- Das Prädikat: " $\overline{PQ}$ und $\overline{RS}$ schneiden sich"

  kann man mathematisch so fassen:

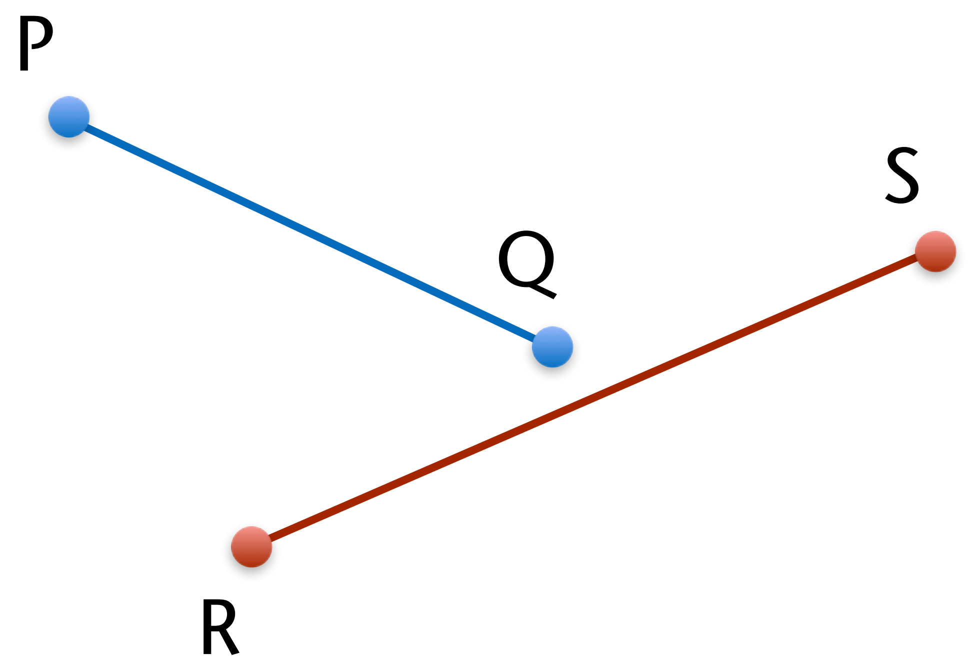
$$(\overline{PR} \times \overline{PQ}) \cdot (\overline{PQ} \times \overline{PS}) > 0$$

und

$$(\overline{RQ} \times \overline{RS}) \cdot (\overline{RS} \times \overline{RP}) > 0$$




- Achtung: funktioniert nur, wenn diese Voraussetzung erfüllt ist:
  - Alle 4 Punkte befinden sich in einer Ebene

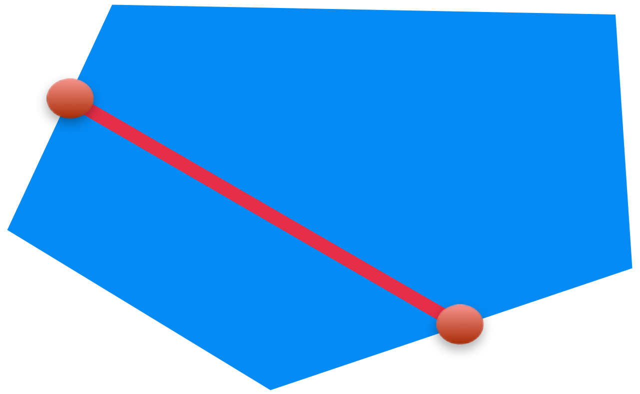


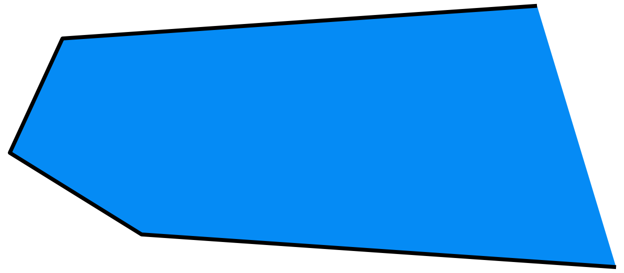
# Konvexität

- Definition Konvexität:

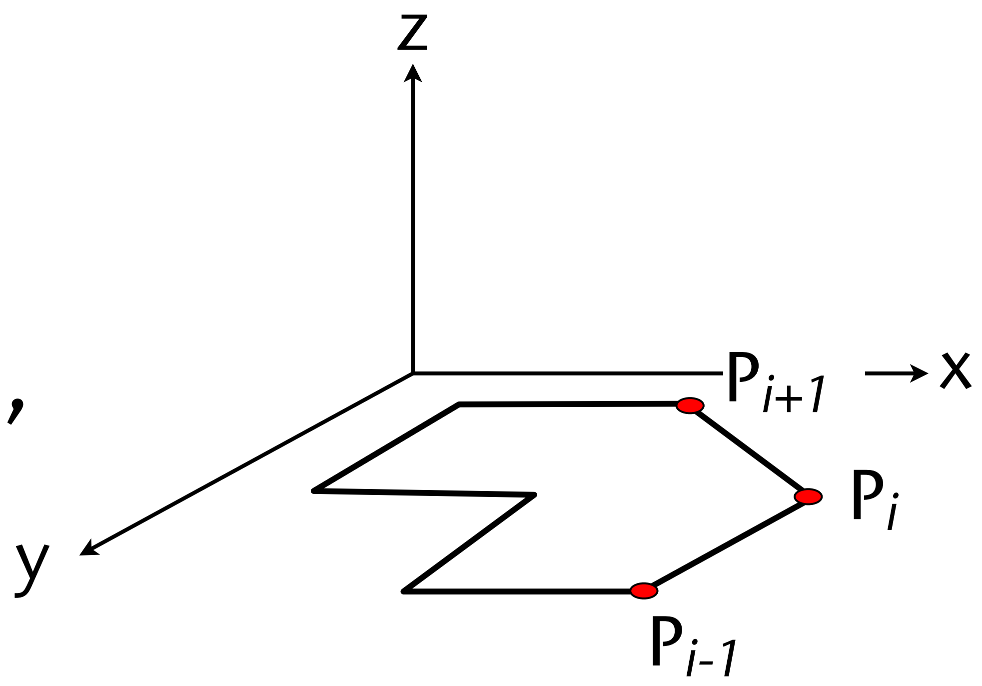
  Ein Gebiet $G \subseteq \mathbb{R}^k$ ist konvex $\Leftrightarrow$

  für alle $P_1, P_2 \in G$ die gesamte Linie $\overline{P_1 P_2} \subseteq G$ ist.





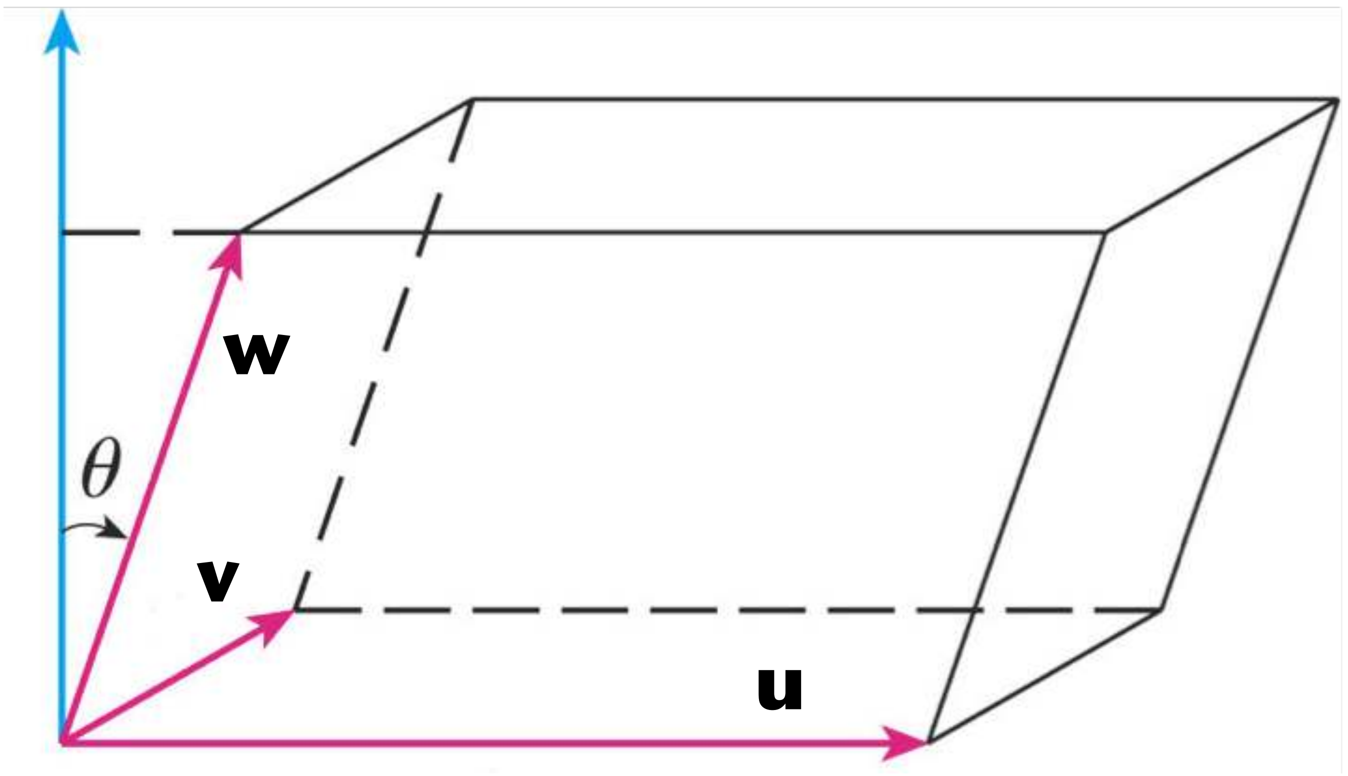
- Bemerkung:
  - Das Gebiet muß nicht beschränkt sein
  - Die Aussage "ein Polygon ist konvex" meint eigtl., daß das von dem Polygon umschlossene Gebiet (inkl. Rand) konvex ist
- Aufgabe: stelle für ein gegebenes Polygon fest, ob es konvex ist
  - Lösung: berechne an jeder Ecke $\mathbf{v}_i \times \mathbf{v}_{i+1}$ , $\mathbf{v}_i = P_i - P_{i-1}$ , und teste das Vorzeichen der z-Komponente
  - Voraussetzung: Polygon muss überschneidungsfrei sein



# Das Spatprodukt

- Definition:

$$(\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \cdot \mathbf{w}$$




- Englische Begriffe:

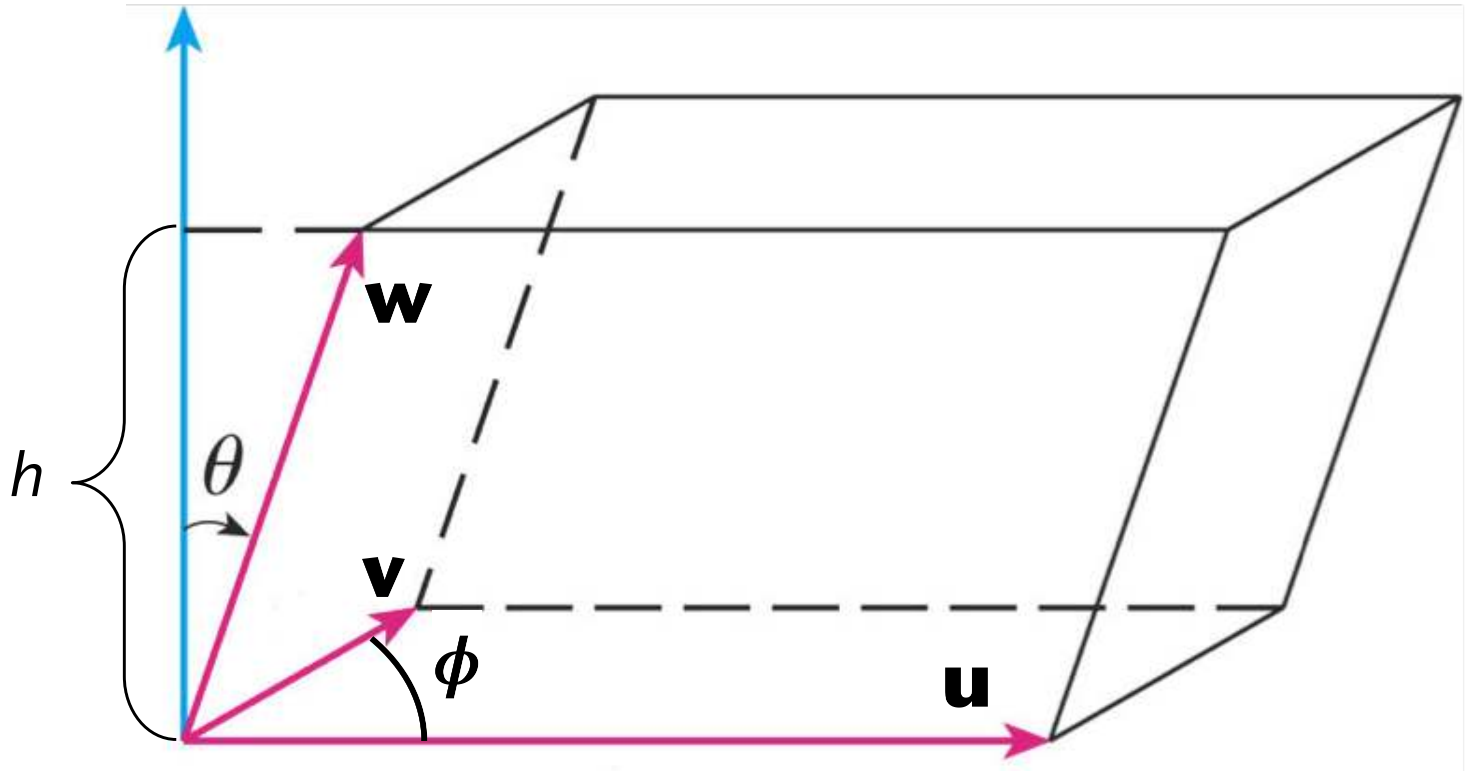
  *scalar triple product, triple product, mixed product,*

- Geometrische Interpretation:

$$\text{Vol}(\text{Spat}) = |(\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \cdot \mathbf{w}|$$

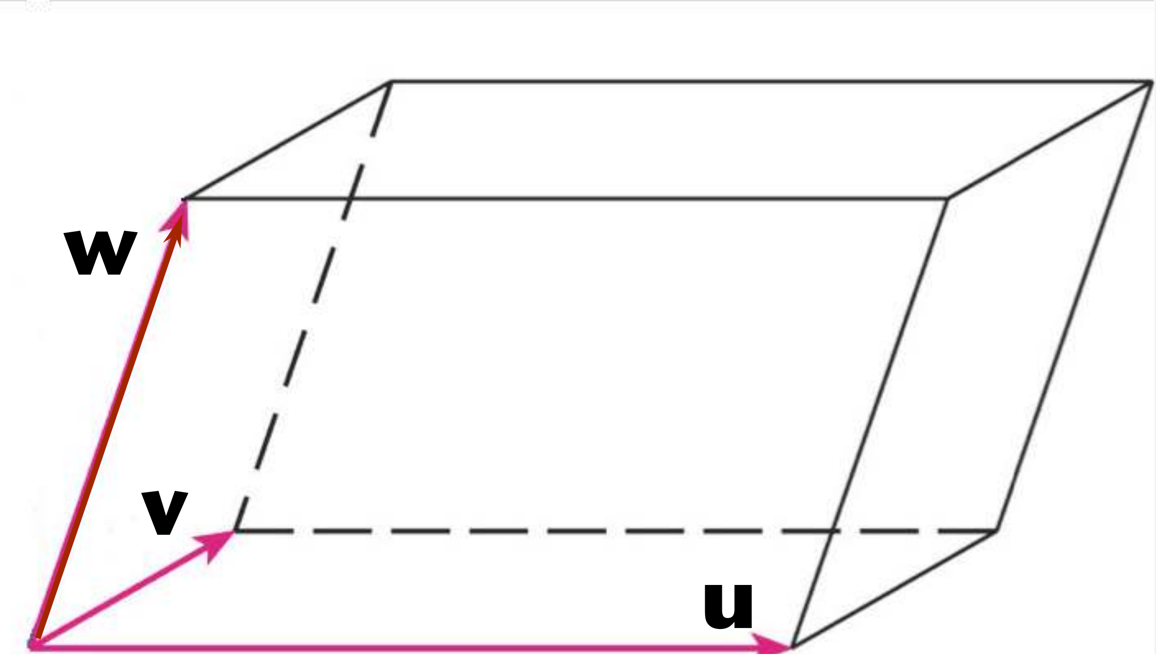
- Beweis:

$$\begin{aligned}\text{Vol}(\text{Spat}) &= \text{Grundfläche} \cdot \text{Höhe} \\ &= \|\mathbf{u}\| \|\mathbf{v}\| \sin \Phi \, \|\mathbf{w}\| \cos \Theta \\ &= \|\mathbf{u} \times \mathbf{v}\| \, \|\mathbf{w}\| \cos \Theta \\ &= \|(\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \cdot \mathbf{w}\|\end{aligned}$$



- Erweiterung des Volumens um ein Vorzeichen:

$$\text{Vol(Spat)} = (\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \cdot \mathbf{w}$$



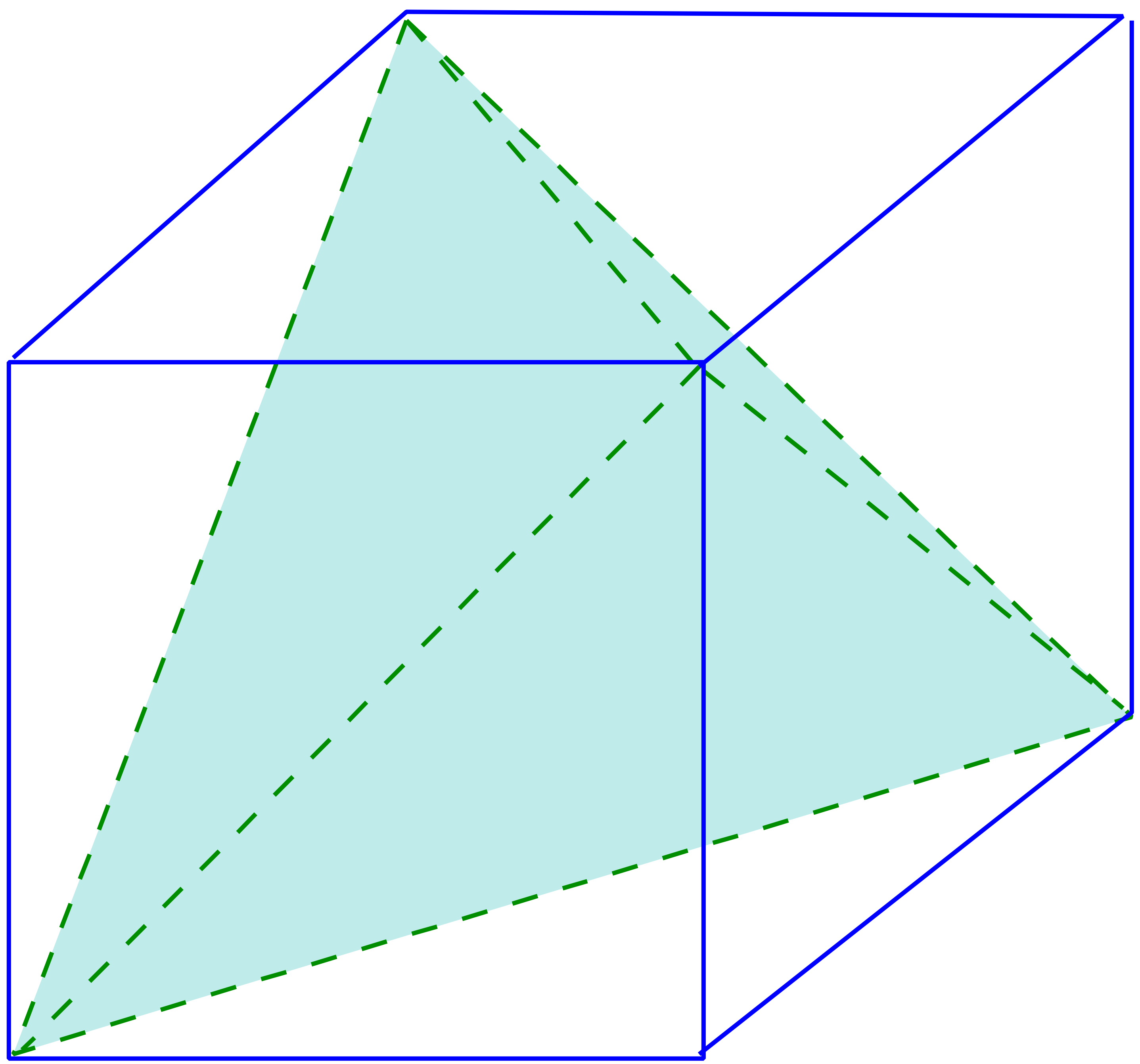

- Vol(Spat) > 0 $\Leftrightarrow$

  **u**, **v**, **w** bilden ein Rechtsystem $\Leftrightarrow$

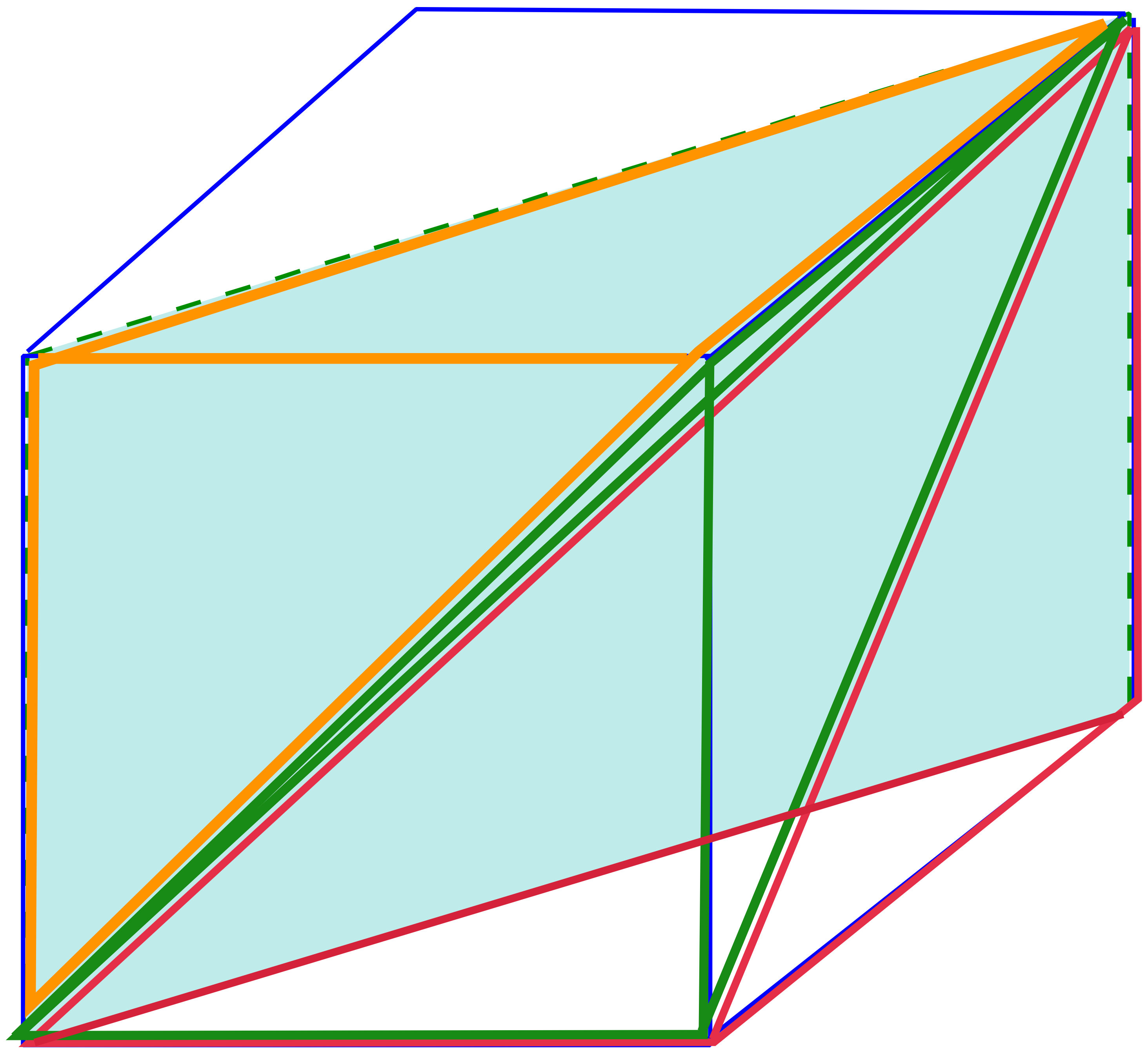
  Winkel zwischen (**u** × **v**) und **w** < 90°

- Bemerkung: $(\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \cdot \mathbf{w} = \det \begin{pmatrix} - & \mathbf{u} & - \\ - & \mathbf{v} & - \\ - & \mathbf{w} & - \end{pmatrix}$

5 Tetraeder

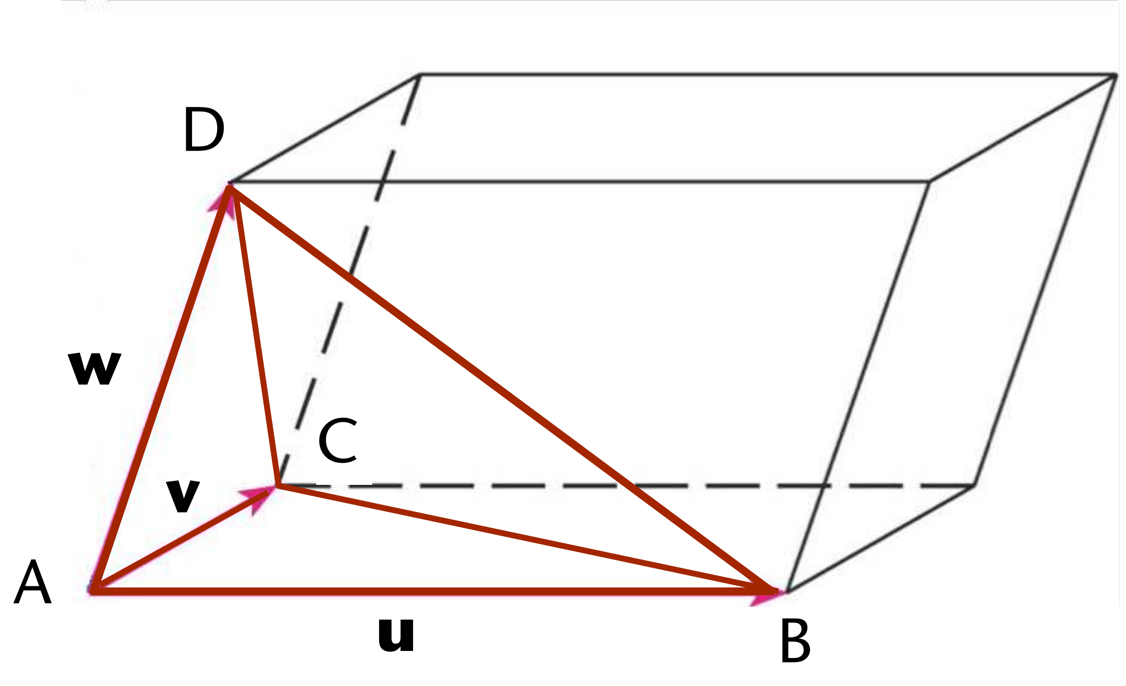


6 Tetraeder



# Das Volumen eines Tetraeders

- Es gilt:



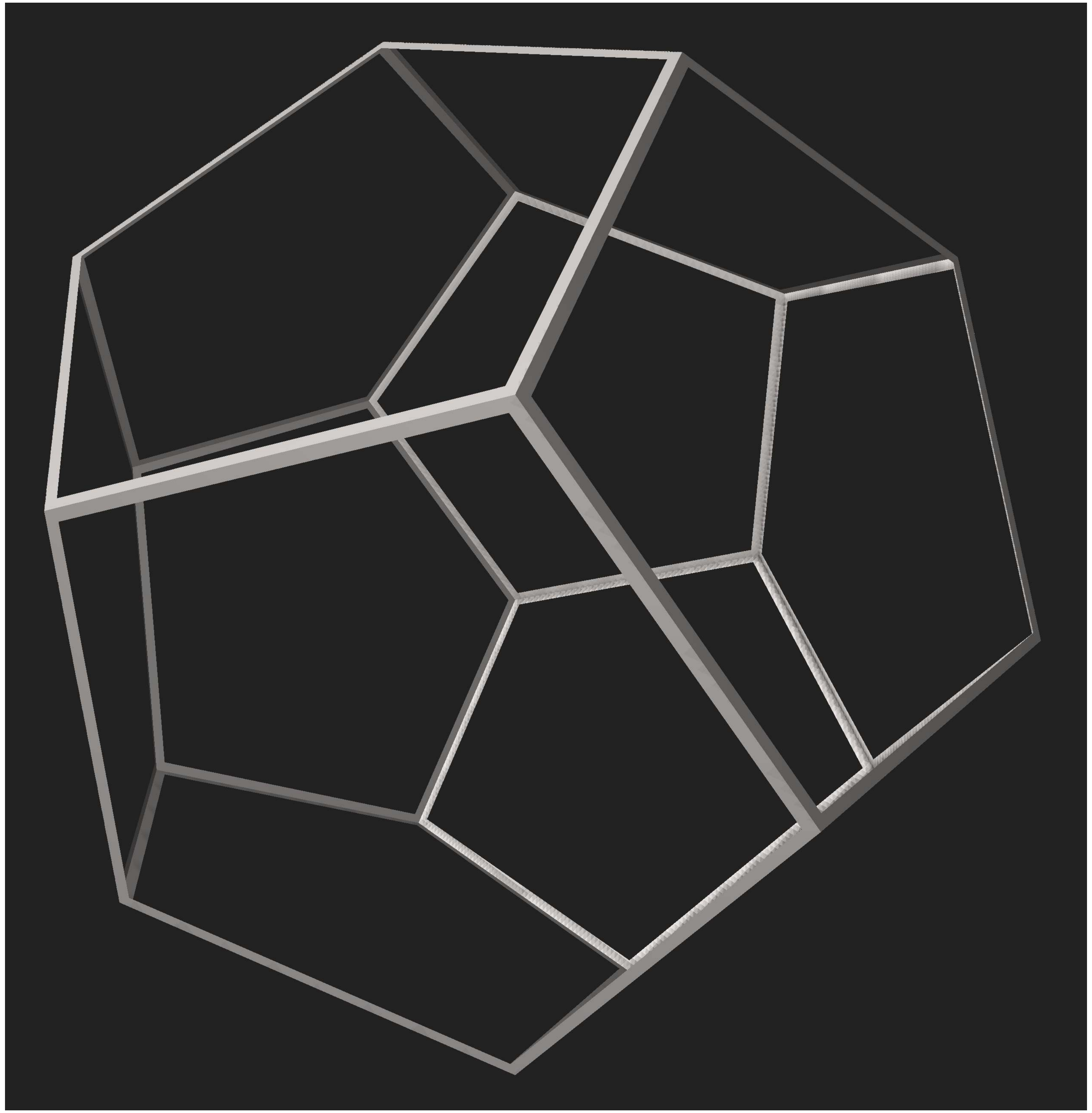

$$\mathrm{Vol}(ABCD) = \frac{1}{6}(\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \cdot \mathbf{w}$$

$$= \frac{1}{6} \det \begin{pmatrix} - & \mathbf{u} & - \\ - & \mathbf{v} & - \\ - & \mathbf{w} & - \end{pmatrix} = \frac{1}{6} \det \begin{pmatrix} B - A \\ C - A \\ D - A \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{6} \det \begin{pmatrix} A_x & A_y & A_z & 1 \\ B_x & B_y & B_z & 1 \\ C_x & C_y & C_z & 1 \\ D_x & D_y & D_z & 1 \end{pmatrix}$$

- Bemerkung: so bekommen die Punkte A, B, C, D einen "Umlaufsinn"!
- Achtung: ein Dreieck im 3D hat keinen Umlaufsinn per se!

# Anwendung: das Volumen beliebiger Objekte



# Koplanarität & Umlaufsinn im 3D

- Definition Umlaufsinn im 3D:

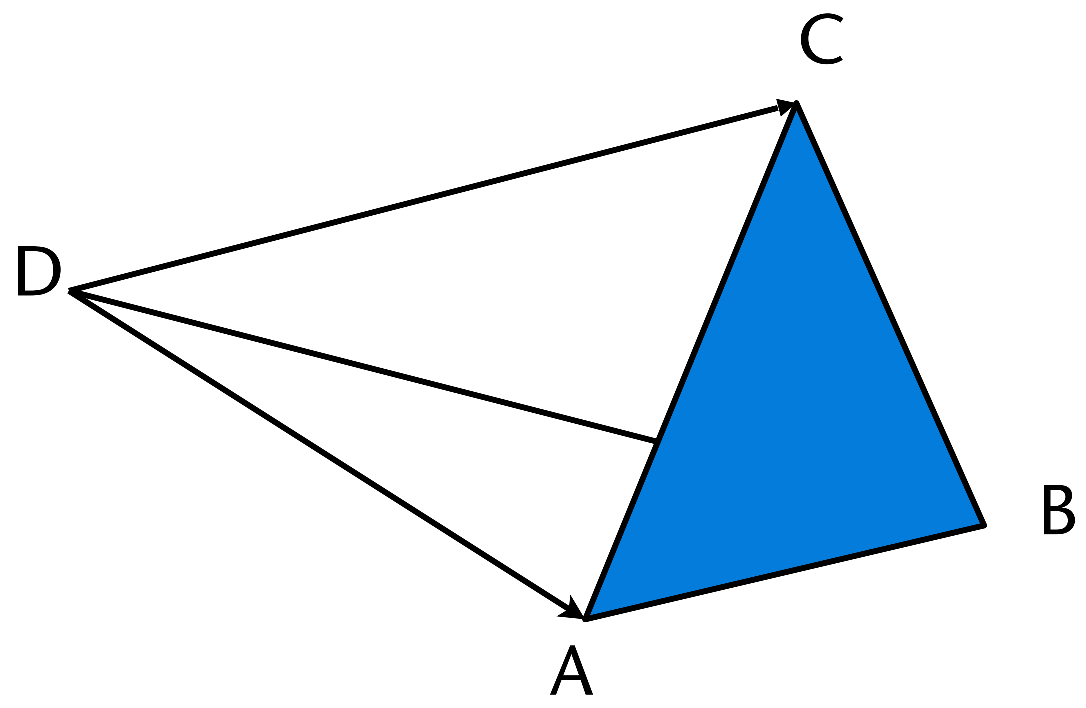
  Drei Punkte A, B, C erscheinen von einem vierten Punkt D aus entgegen dem Uhrzeigersinn $\Leftrightarrow$

$$(A-D)\times(B-D)\cdot(C-D)<0$$

$$\Leftrightarrow \mathrm{Vol}(DACB)<0$$

$$\Leftrightarrow \mathrm{Vol}(ABCD)<0$$

Your task: check the signs!

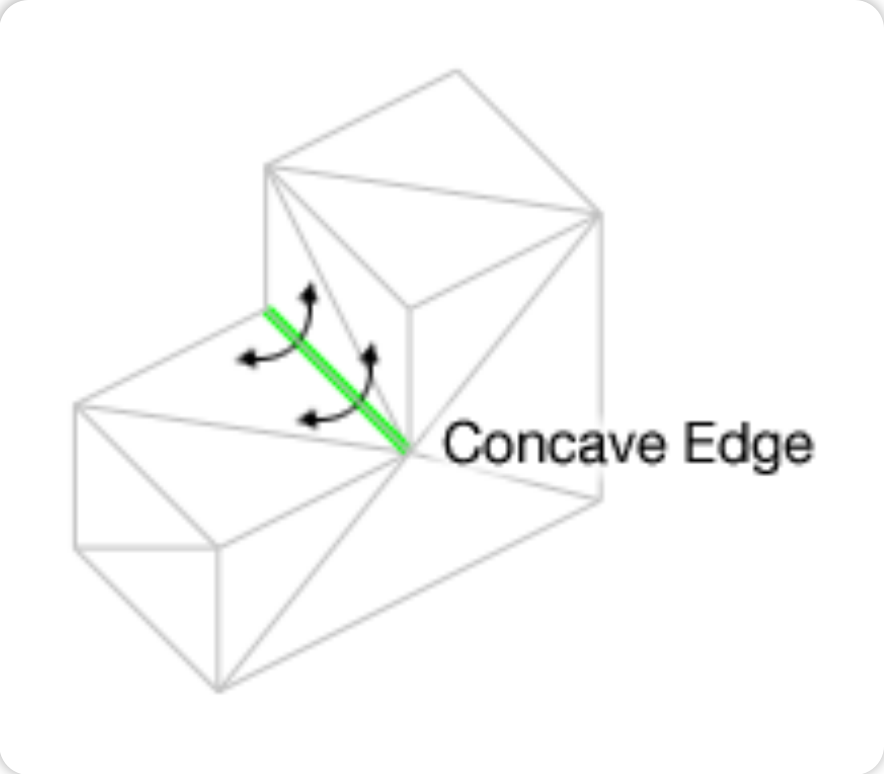


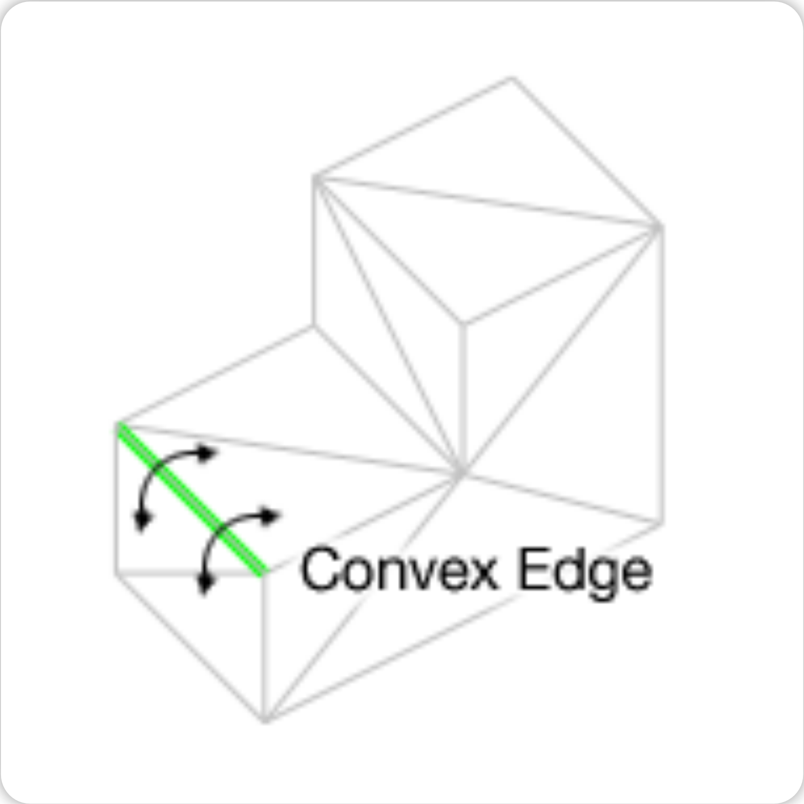

- Koplanarität:

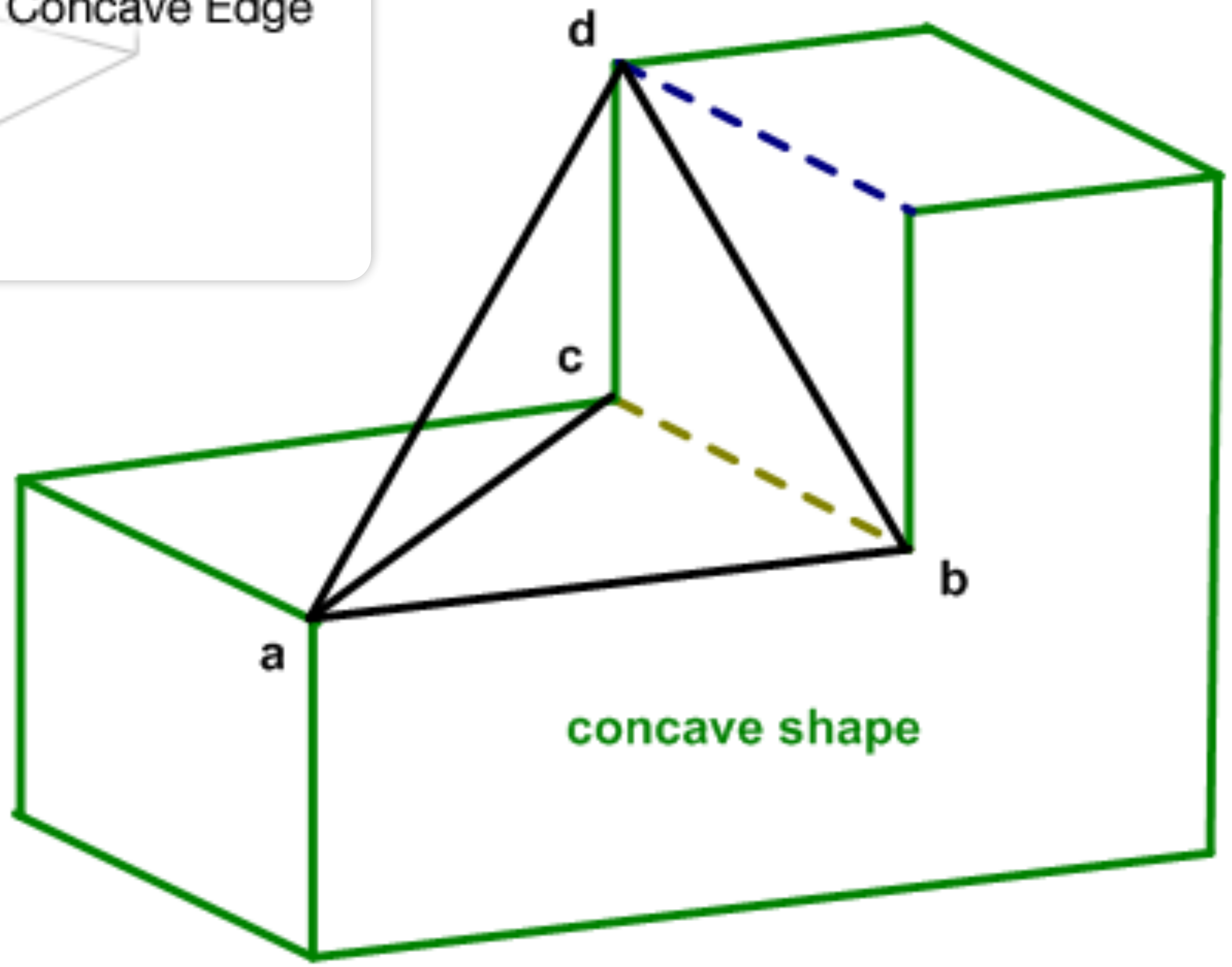
  Drei Vektoren **a, b, c** sind koplanar $\Leftrightarrow$ $(\mathbf{a}\times\mathbf{b})\cdot\mathbf{c}=0$

# Konvexität in 3D

- Test auf Konvexität oder Konkavität einer Kante eines Polyeders:



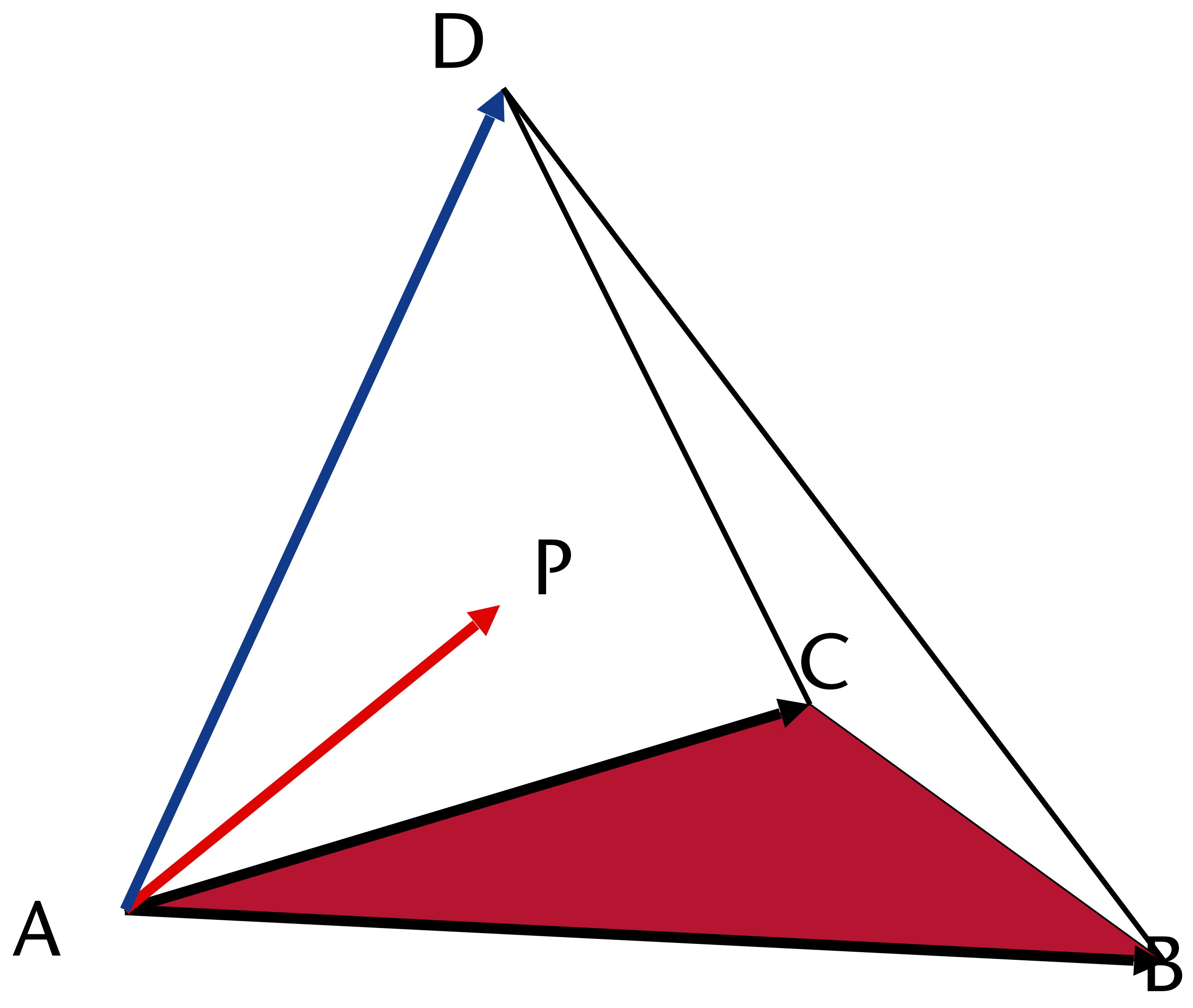
# Geometrisches Prädikat: Punkt P im Inneren eines Tetraeders

- Wann liegt ein Punkt P im Inneren eines Tetraeders?

- Genau dann, wenn die Vorzeichen von

$$\mathrm{Vol}(ABCD)$$
$$\mathrm{Vol}(PBCD)$$
$$\mathrm{Vol}(APCD)$$
$$\mathrm{Vol}(ABPD)$$
$$\mathrm{Vol}(ABCP)$$

alle gleich sind!

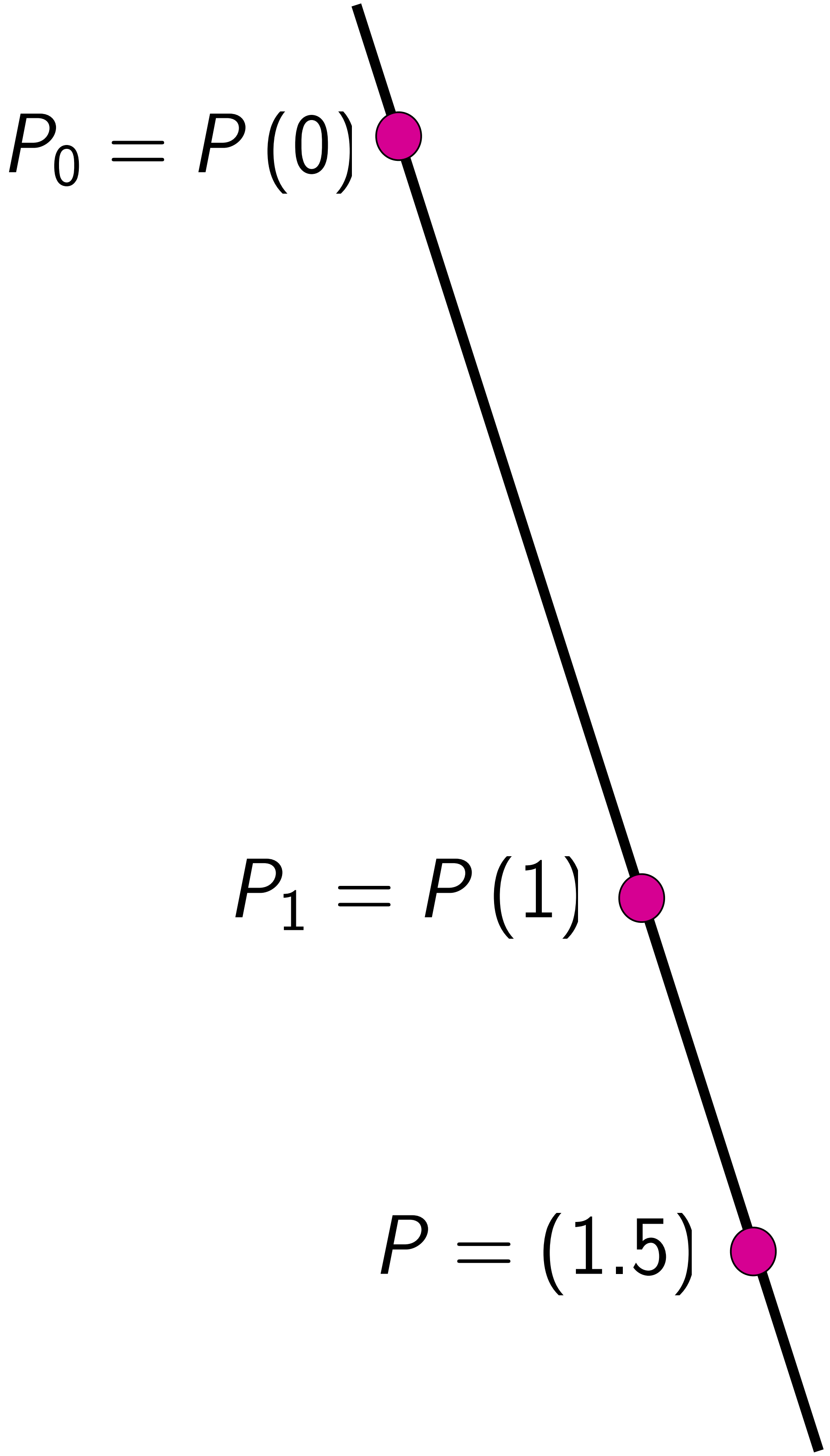


# Parametrische Geraden (*parametric line*)

- Definition einer Geraden, die durch zwei Punkte geht:

$$P(t) = P_0 + t(P_1 - P_0)$$

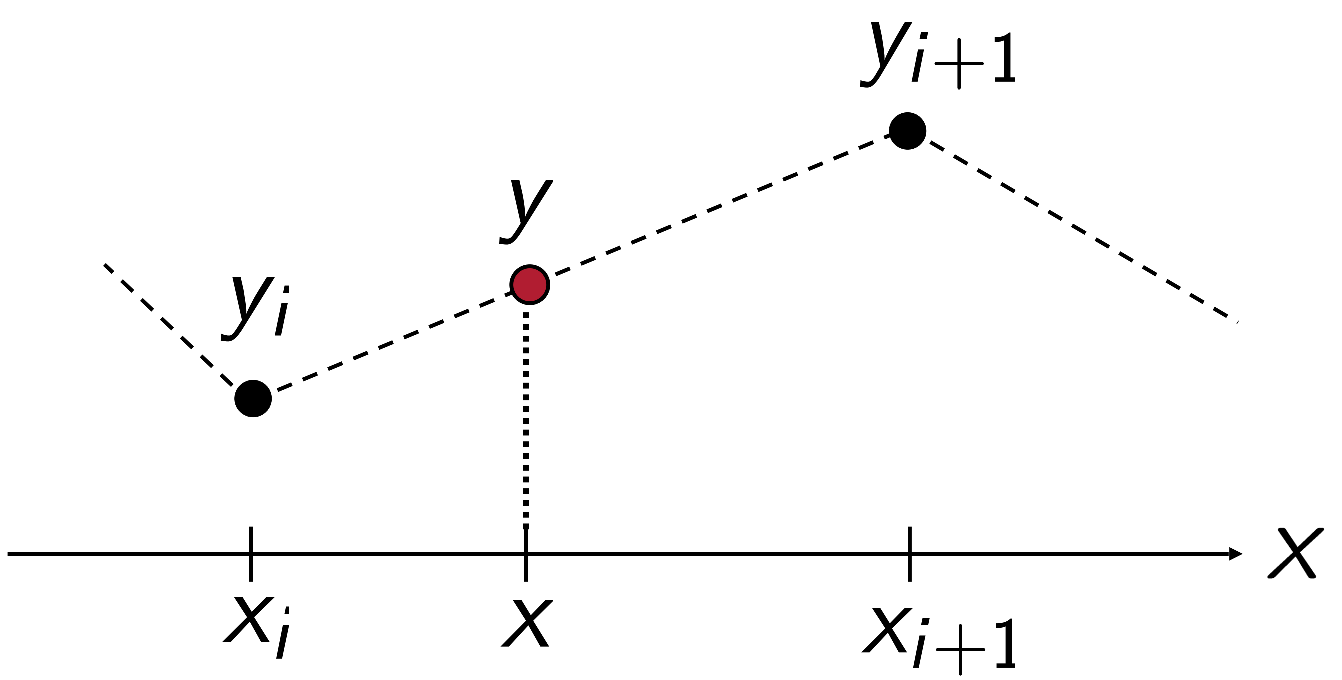
- Interpretation:
  zu $P(t)$ kommt man, indem man bei $P_0$ startet, und um $t$ "Einheiten" auf der Geraden in Richtung $P_1$ geht



# Lineare Interpolation

- Häufige Aufgabe in CG
  - Punkte, Farben, Höhen, etc., interpolieren
- Die Gerade $P(t) = P_0 + t(P_1 - P_0) = (1 - t)\,P_0 + t\,P_1$
  ist eine lineare Interpolation (im $n$–dim. Raum, $P_i \in \mathbb{R}^n$ )
- Erweiterung : stückweise lineare Interpolation
  - Wähle Knotenvektor $(t_0, t_1, \ldots, t_n)$ [ist evtl. schon gegeben]
  - Zu jedem $t_i$ ist $P_i$ gegeben
  - Um interpolierten Wert an der Stelle $t \in [t_0, t_n]$ zu bestimmen, bestimme $i$ mit $t \in [t_i, t_{i+1}]$ , weiter mit $P_i$, $P_{i+1}$ wie oben, und $t' = t - t_i$

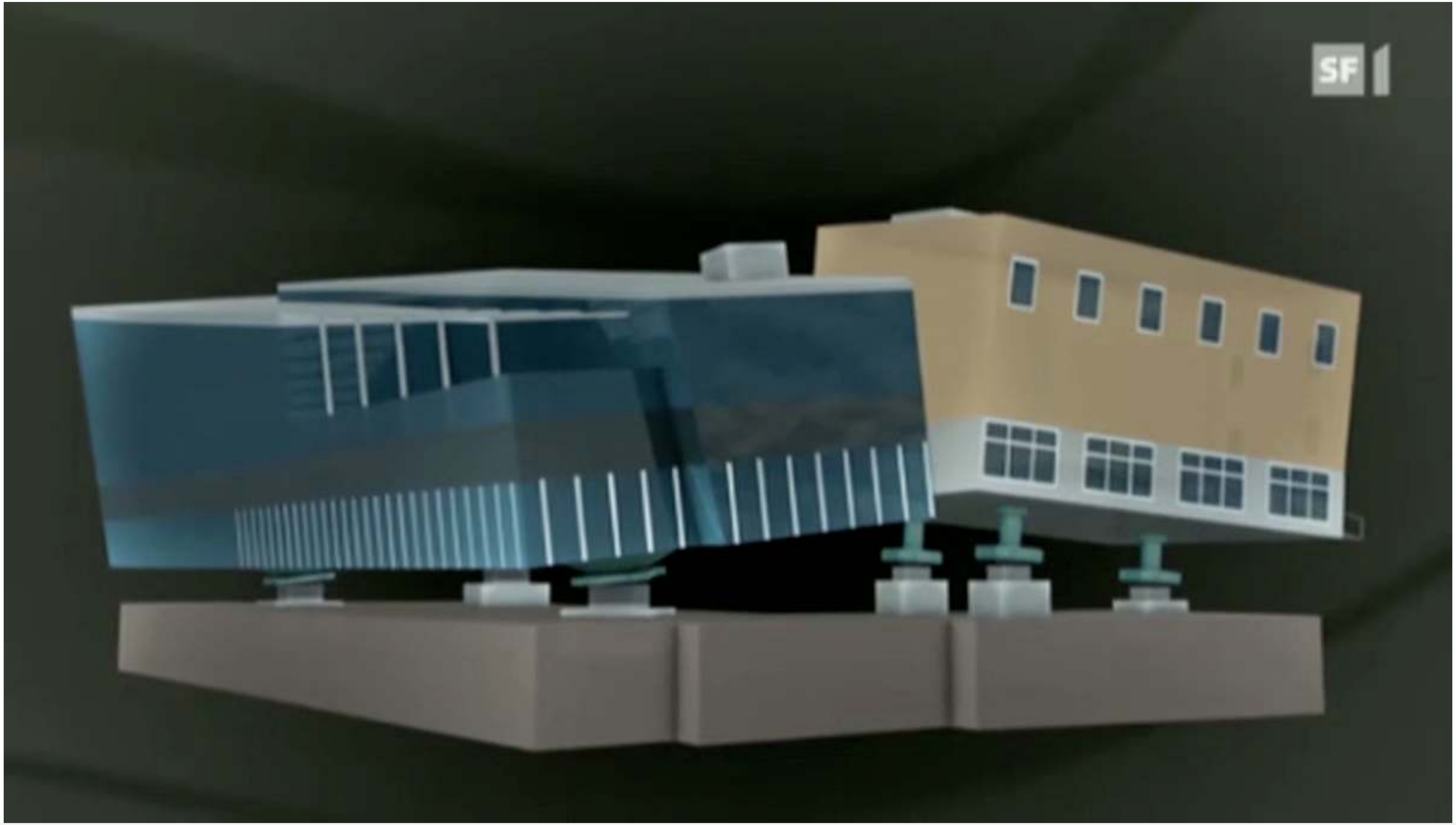
- Variante der stückweise linearen Interpolation im 1D
- Gegeben $x_i, x_{i+1}$ und $y_i, y_{i+1}$
  - $y_i$ könnte z.B. = Höhe, Rot-Kanal, o.ä. sein
- Gesucht $y$ für $x \in [x_i, x_{i+1}]$
- Lineare Interpolation:




$$t := \frac{x - x_i}{x_{i+1} - x_i} \in [0, 1] \qquad x \in [x_i, x_{i+1}]$$

$$y = (1 - t)\, y_i + t y_{i+1}$$

# Das Prinzip "3 Punkte liegen immer in einer Ebene" in der Architektur

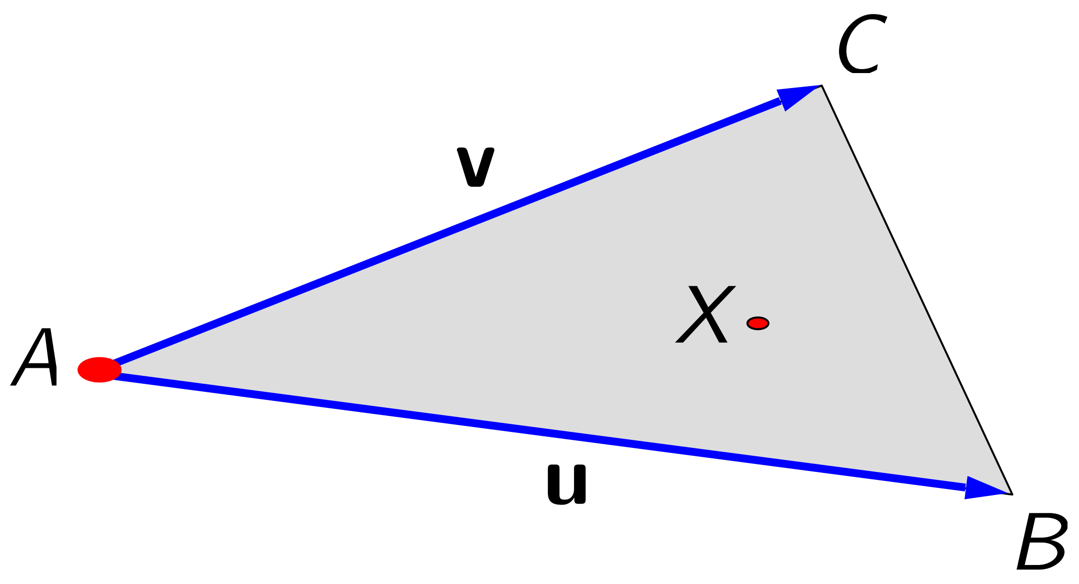



Aus der Sendung "Einstein" vom 25.10. 2012 des Schweizer Fernsehens SF

# Ebenen / Dreiecke

- Durch 3 Punkte wird eine Ebene aufgespannt
- Parameterdarstellung:

$$X = A + s \cdot \mathbf{u} + t \cdot \mathbf{v}$$

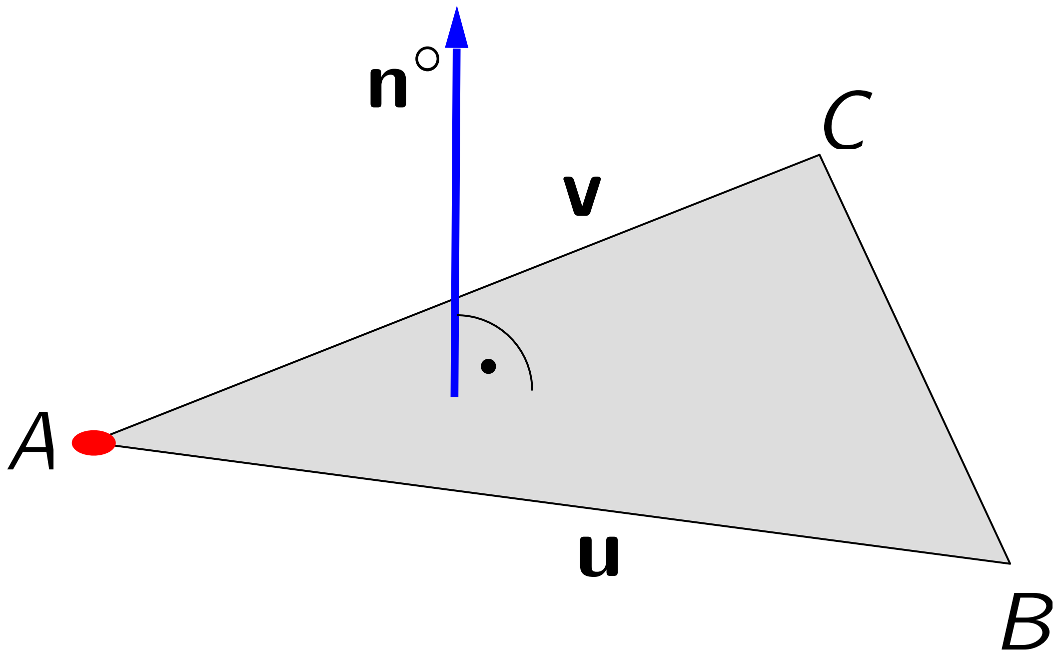



- Für Dreiecke gilt zusätzlich:

$$s, t \in (0,1)\,, \qquad s + t \leq 1$$

- Normale eines Dreiecks / einer Ebene:

$$\mathbf{n}^\circ = \frac{\mathbf{u} \times \mathbf{v}}{|\mathbf{u} \times \mathbf{v}|}$$

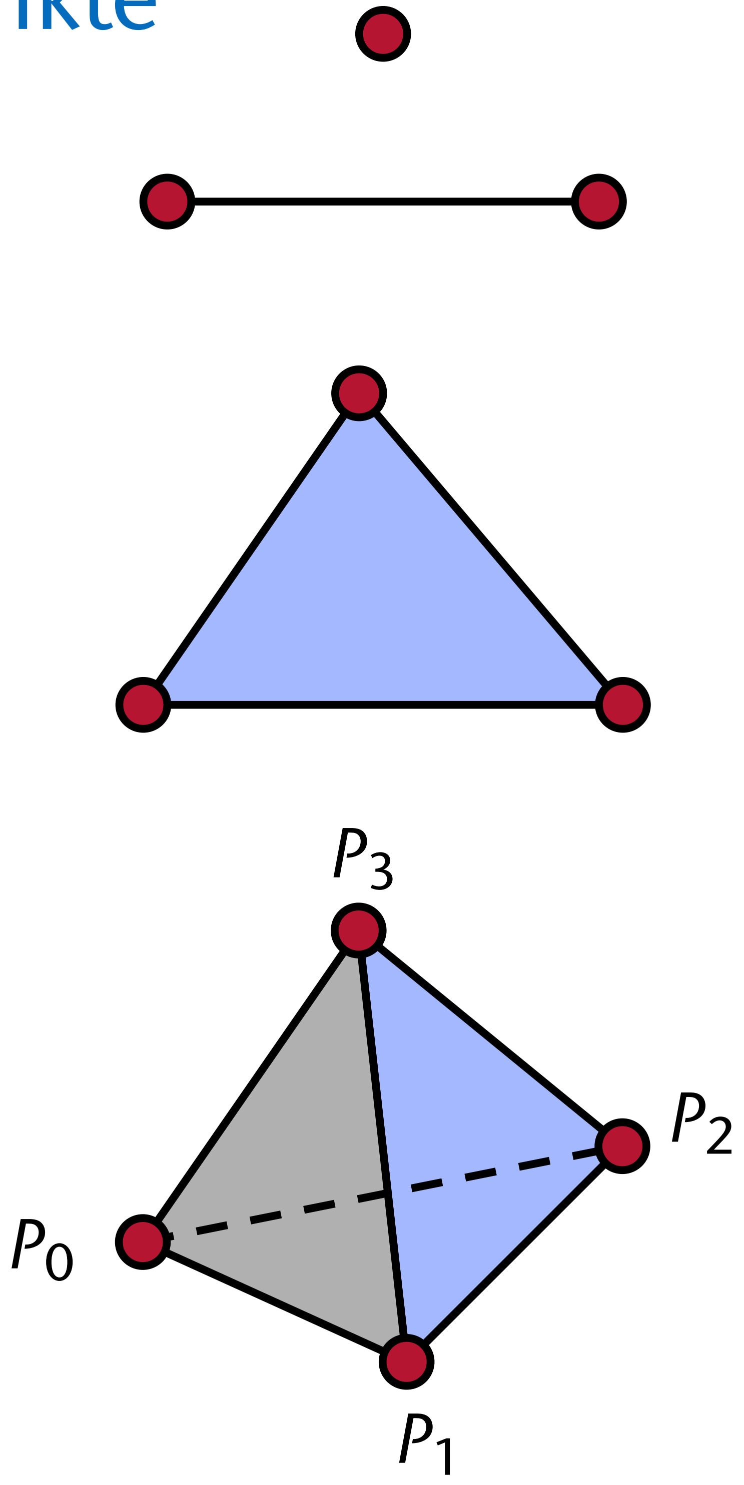


# Exkurs: Verallgemeinerung ⟶ Simplex im $\mathbb{R}^d$

FYI

- Simplex := Polyeder mit genau $d$+1 affin unabhängigen Punkte
  - Verbindung dieser Punkte + "Inneres"
- Beispiele:
  - 0D Simplex → Punkt
  - 1D Simplex → Geradenstück ("Linie")
  - 2D Simplex → Dreieck
  - 3D Simplex → Tetraeder
- Allgemein:
  - Punkte $P_0, \ldots, P_d$
  - Simplex = alle Punkte $X$ mit

$$X = P_0 + \sum_{i=1}^{d} s_i \mathbf{u}_i , \quad \mathbf{u}_i = P_i - P_0 , \quad s_i \geq 0, \quad \sum_{i=0}^{d} s_i \leq 1$$



- Englische Terminologie:

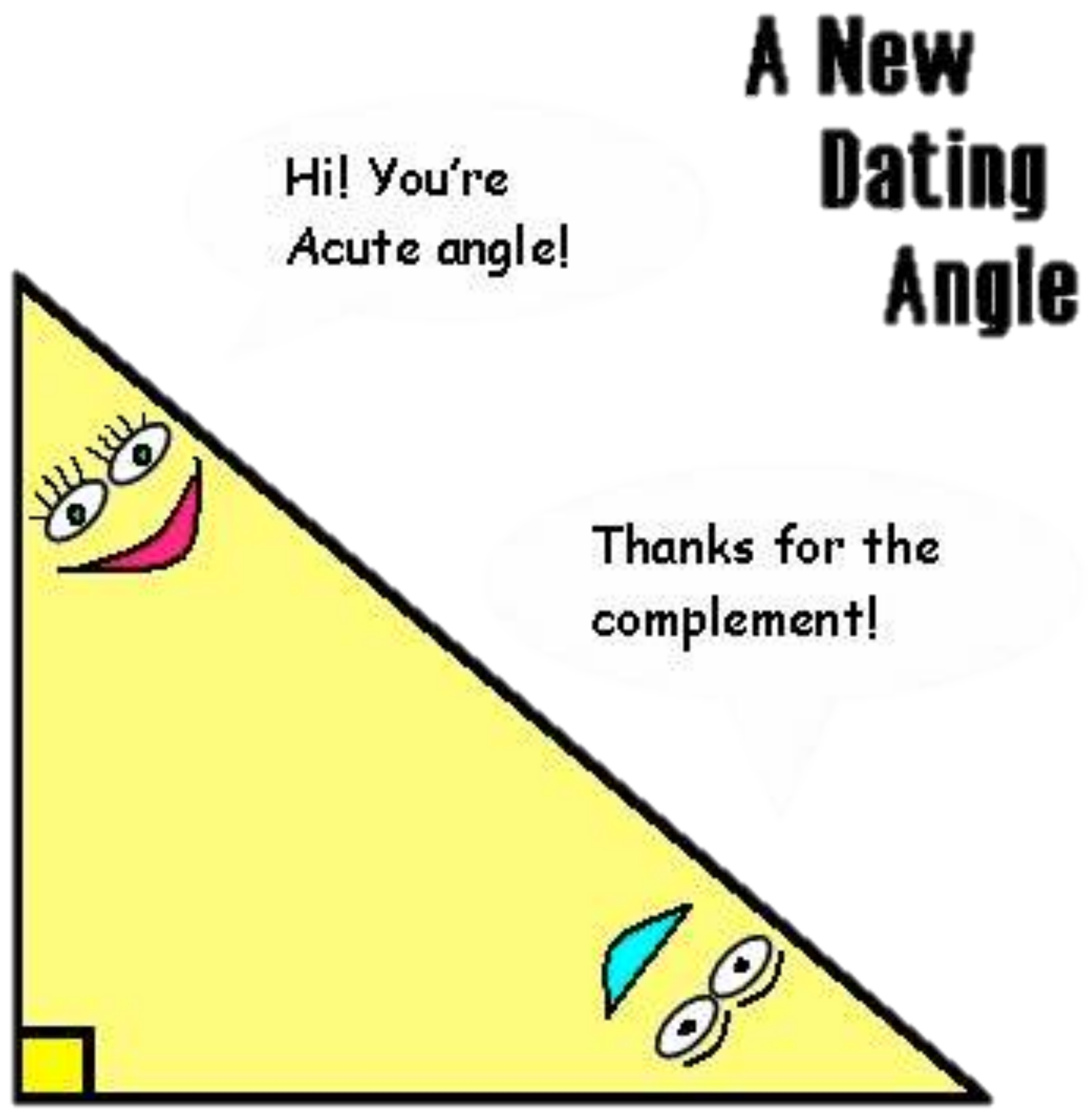
  "*angle*" = Winkel (fig. Blickwinkel)

  "*acute angle*" = spitzer Winkel

  "*obtuse angle*" = stumpfer Winkel

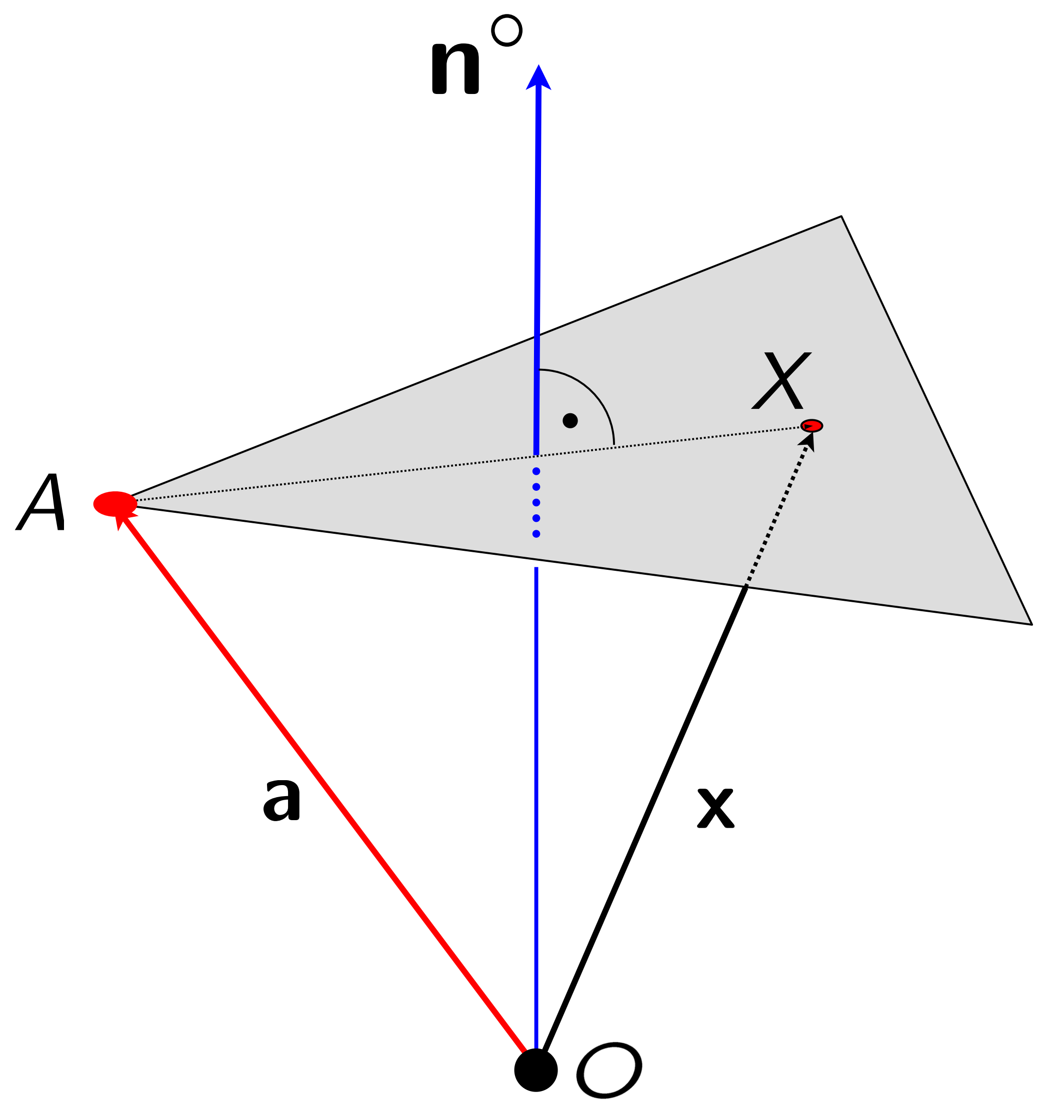
When Two Angles Meet

Something about this
just ain't right.



# Normalenform der Ebene (implizite Form)

$$\begin{aligned} \overrightarrow{AX} \cdot \mathbf{n}^\circ &= 0 \\ (X - A) \cdot \mathbf{n}^\circ &= 0 \\ \mathbf{x} \cdot \mathbf{n}^\circ - \mathbf{a} \cdot \mathbf{n}^\circ &= 0 \\ \mathbf{x} \cdot \mathbf{n}^\circ - d &= 0 \end{aligned}$$




- Geometrische Interpretation:
  - Betrachte die Gerade durch den Ursprung in Richtung $\mathbf{n}^\circ$
  - Jeder Punkt $X$ ist ein Punkt der Ebene, gdw. er, auf diese Gerade projiziert, den gleichen Abstand vom Ursprung hat, wie die Projektion von A auf diese Gerade

- Mini-Lemma:

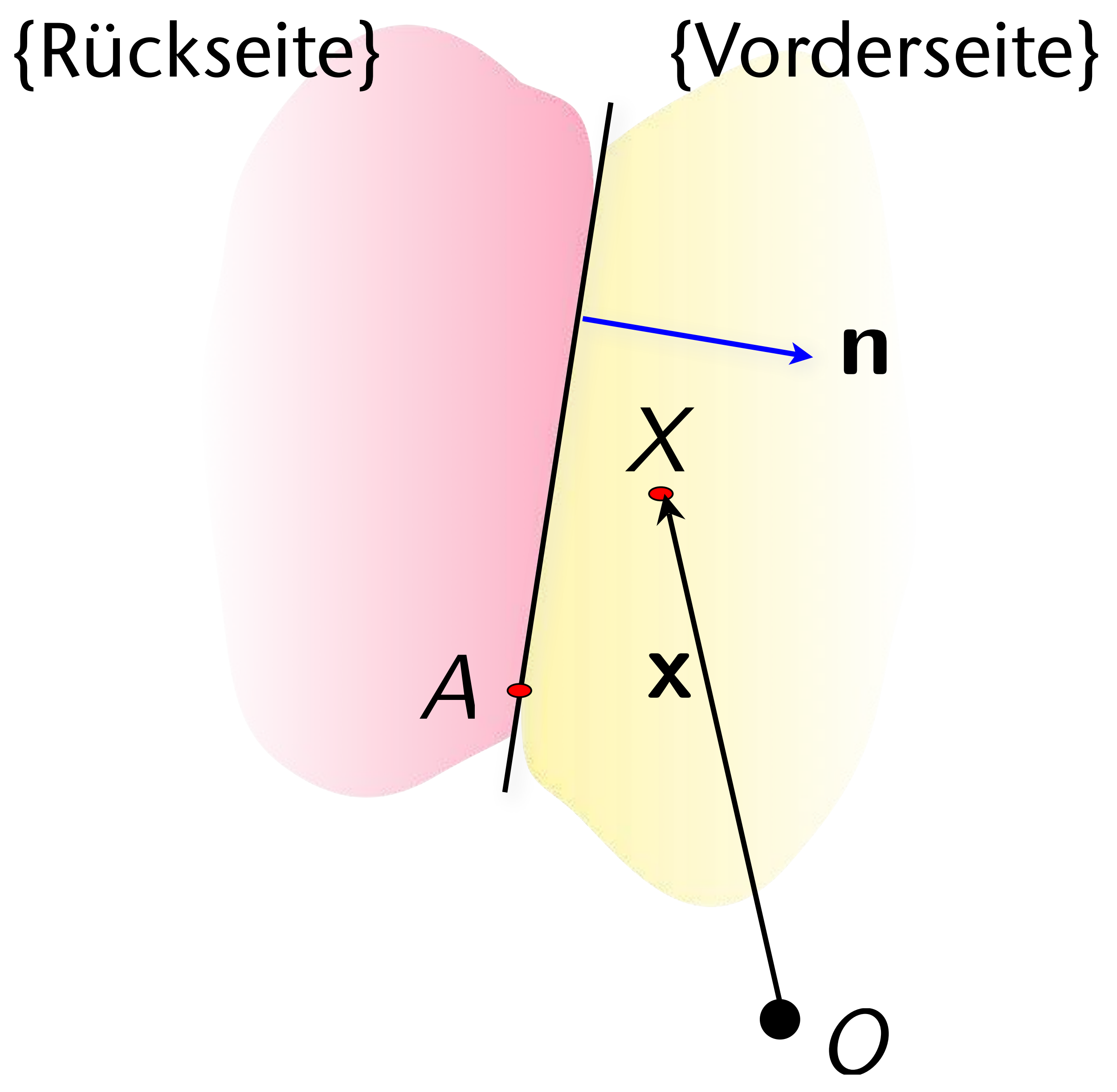
  Eine Ebene $(\mathbf{n},d)$ im $\mathbb{R}^k$ definiert

  3 Äquivalenzklassen:

  "Vorderseite" $:= \{X \mid \mathbf{x}\cdot\mathbf{n} - d > 0\}$

  "Rückseite" $:= \{X \mid \mathbf{x}\cdot\mathbf{n} - d < 0\}$

  Ebene selbst $:= \{X \mid \mathbf{x}\cdot\mathbf{n} - d = 0\}$




- Warum ist die Beschriftung korrekt?
  - Weil $(X-A)\cdot\mathbf{n} = |X-A|\cdot|\mathbf{n}|\cdot\cos\theta$

# Die Dualität von Punkten und Geraden in 2D

FYI

Homogeneous representation of line

$$ax + by + c = 0 \Leftrightarrow (a, b, c)^{\mathrm{T}}$$

A point $\boldsymbol{x} = (x, y, 1)^{\mathrm{T}}$ lies on the line $\boldsymbol{l} = (a, b, c)^{\mathrm{T}}$

$$\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{l} = \boldsymbol{l}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x} = 0$$

equivalently,

$$\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{l} = \boldsymbol{l} \cdot \boldsymbol{x} = 0$$

Intersection of two lines $\boldsymbol{l} = (a, b, c)^{\mathrm{T}}$ and $\boldsymbol{l}' = (a', b', c')^{\mathrm{T}}$

$$\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{l} = \boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{l}' = 0 \quad \Longrightarrow \quad \boldsymbol{x} = \boldsymbol{l} \times \boldsymbol{l}'$$

Line through two points $\boldsymbol{x} = (x, y, 1)^{\mathrm{T}}$ and $\boldsymbol{x}' = (x', y', 1)^{\mathrm{T}}$

$$\boldsymbol{l}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{l}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}' = 0 \quad \Longrightarrow \quad \boldsymbol{l} = \boldsymbol{x} \times \boldsymbol{x}'$$

Duality of point and line

- Points and lines can be swapped.