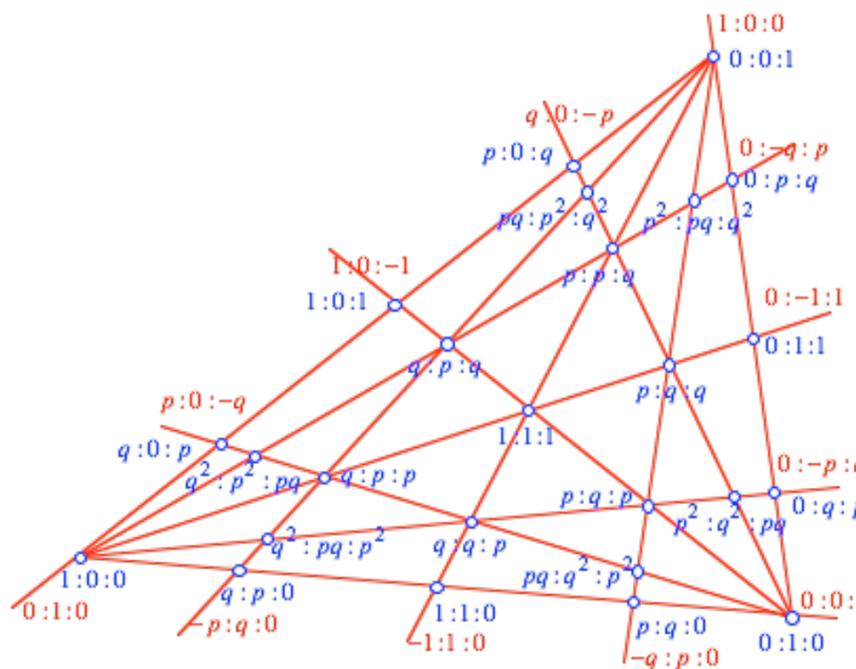


# Computer-Graphik I

## Baryzentrische Koordinaten



G. Zachmann

University of Bremen, Germany

[cgvr.cs.uni-bremen.de](http://cgvr.cs.uni-bremen.de)

- Def.: **affin unabhängig**

Gegeben:  $k+1$  Punkte  $P_i \in \mathbb{R}^n$ ,  $0 \leq i \leq k$ .

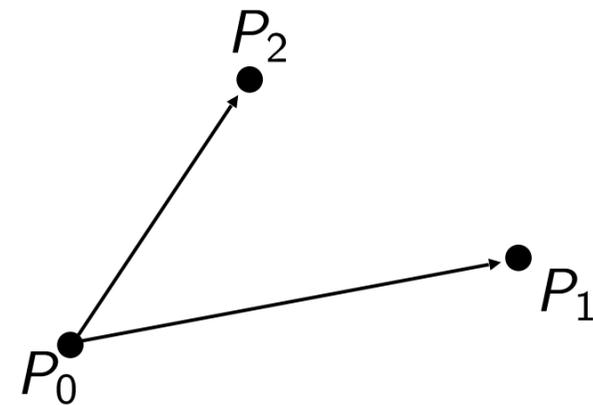
Seien dadurch  $k$  Vektoren  $v_i$  definiert:  $v_i := P_i - P_0$ ,  $i = 1, \dots, k$

Die Punkte  $P_i$  heißen **affin unabhängig**  $\Leftrightarrow$

die Vektoren  $v_i$  linear unabhängig sind.

- Beispiel:
- Lemma:

Falls die  $k+1$  Punkte  $P_i \in \mathbb{R}^n$  affin unabhängig sind  $\Rightarrow k \leq n$ .





- Def.: affines Koordinatensystem

Wenn  $k+1$  Punkte  $P_0, \dots, P_k \in \mathbb{R}^n$  affin unabhängig sind, so definieren sie ein **affines Koordinatensystem** (aka. **affine Basis**).

- Def.: baryzentrische Kombination, baryzentrische Koordinaten

Seien  $k+1$  affin unabhängige Punkte  $P_0, \dots, P_k \in \mathbb{R}^n$  gegeben. Daraus kann man weitere Punkte konstruieren mittels einer **baryzentrische Kombination** (a.k.a. **affine Kombination**):

$$P = \sum_{i=0}^k \lambda_i P_i, \quad \text{mit} \quad \sum_{i=0}^k \lambda_i = 1, \quad \lambda_i \in \mathbb{R}$$

Die  $\lambda_i$  heißen **baryzentrische Koordinaten** von  $P$  bzgl. der Koordinatensystems  $[P_0, P_1, \dots, P_k]$

# Eindeutigkeit der baryzentrischen Koordinaten

- Satz (o. Bew.):

Die Punkte  $P_0, \dots, P_k \in \mathbb{R}^n$ ,  $k \leq n$ , sind **affin unabhängig**  $\Leftrightarrow$  jede affine Kombination bzgl. dieser Punkte ist *eindeutig*, d.h.

$$\forall s_i, t_i \in \mathbb{R} \text{ mit } \sum s_i = \sum t_i = 1 :$$

$$\sum s_i P_i = \sum t_i P_i \Leftrightarrow \forall i = 0, \dots, k : s_i = t_i$$

# Affine Abbildungen

- Definition:

**Affine Abbildung** := jede Abbildung  $\phi$ , die invariant bzgl. affiner Kombinationen ist in folgendem Sinn:

$$\phi(P) = \phi\left(\sum \lambda_i P_i\right) = \sum \lambda_i \phi(P_i)$$

- M.a.W.:  
eine affine Abbildung ist eindeutig durch die Bilder der affinen Basis festgelegt.
- Vorgriff (o. Bew.): Affine Abbildungen "="  
{alle lineare Abbildungen} + {alle Translationen}

# Kleiner Exkurs: die **konvexe Hülle**

- Definition: **konvexe Hülle**

Seien  $P_0, \dots, P_k$  Punkte (*nicht* notw.weise affin unabhängige Pkte).  
Dann ist die **konvexe Hülle** dieser Punkte definiert als:

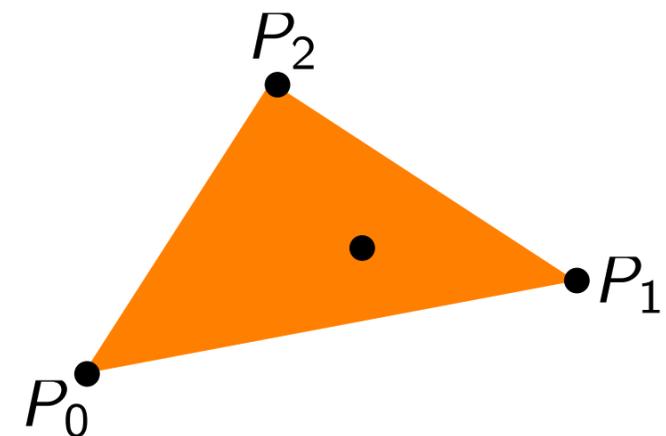
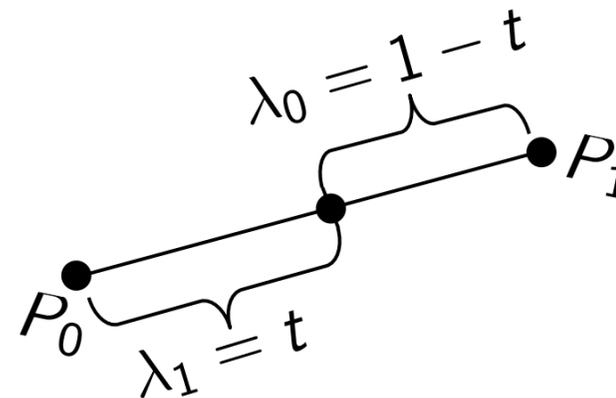
$$\text{CH}(P_0, \dots, P_k) := \left\{ P \mid P = \sum \lambda_i P_i, \sum \lambda_i = 1, \forall i : \lambda_i \geq 0 \right\}$$

In diesem Fall gilt  $\forall i : 0 \leq \lambda_i \leq 1$ .

Eine solche Summe heißt auch **konvexe Kombination**.

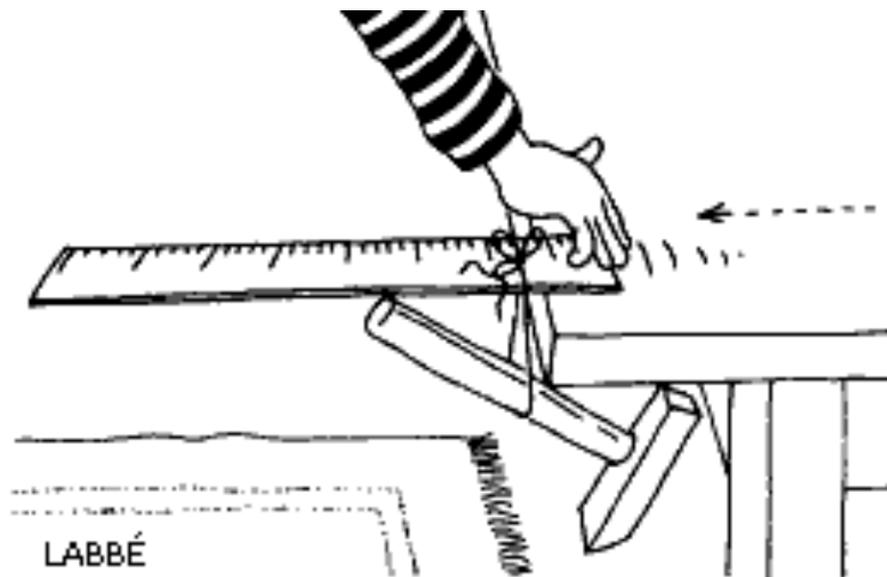
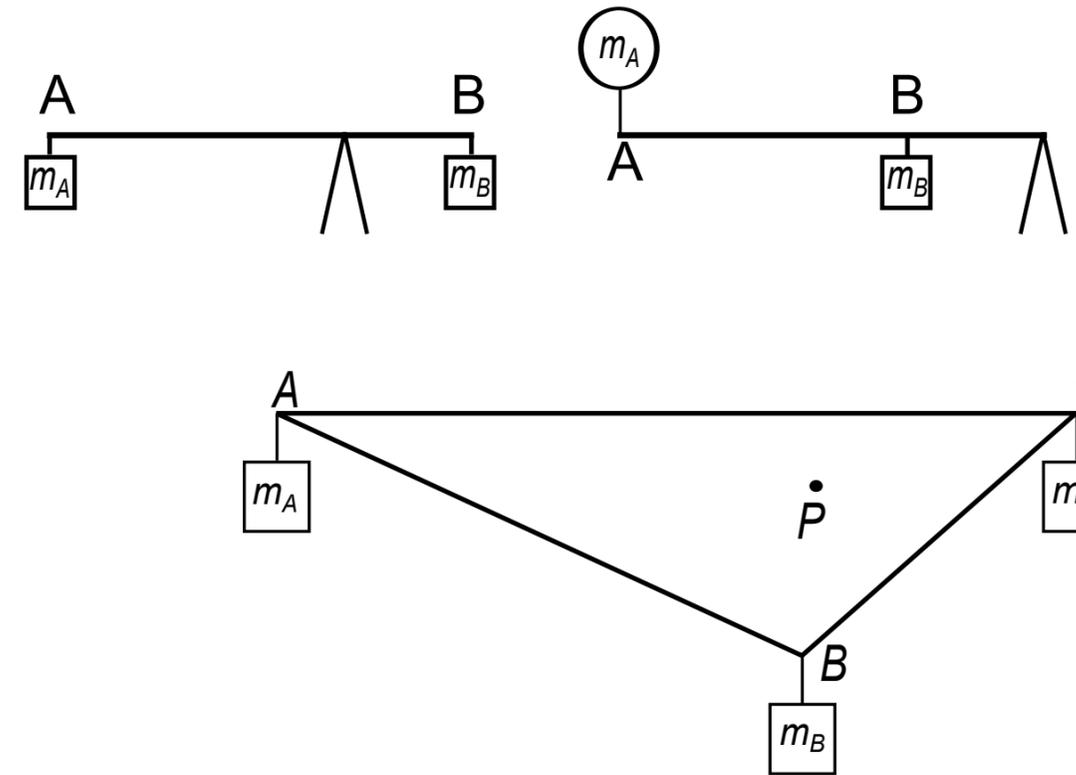
- Beispiele:

- $P_0, P_1 \rightarrow$  Strecke
- $P_0, P_1, P_2 \rightarrow$  Dreieck



# Physikalische Interpretation

- Gegeben  $k + 1$  Punkte  $P_0, \dots, P_k \in \mathbb{R}^n$  mit den Massen  $m_i$ ,  $\sum m_i \neq 0$
- Definiere die "normierten Massen"  $\lambda_i = \frac{m_i}{\sum m_i}$
- Dann ist der Punkt  $P = \sum \lambda_i P_i$  genau der **Schwerpunkt** der  $k+1$  Punkte

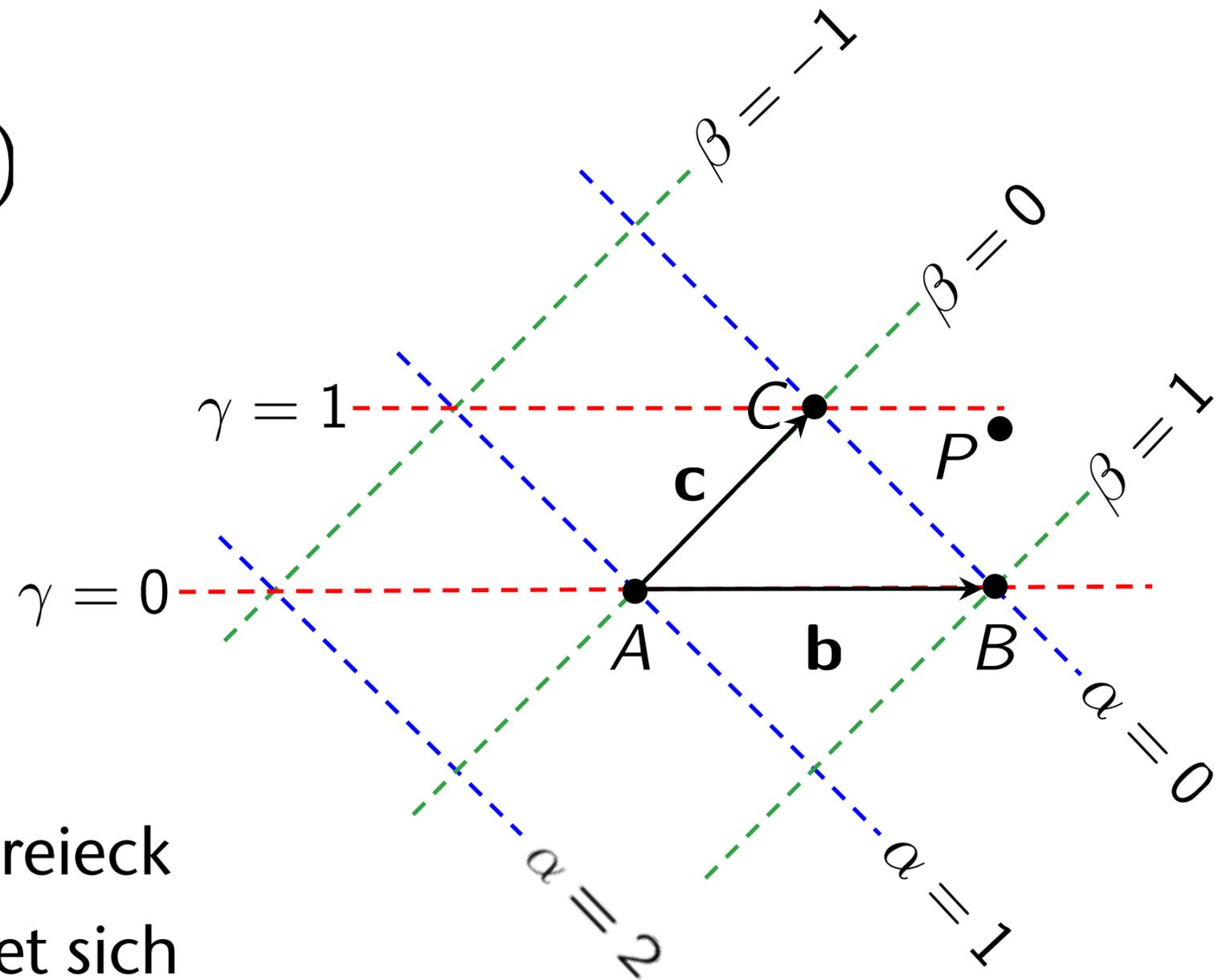


# Isolinien an einem Dreieck

$$\begin{aligned}
 P &= A + \beta \mathbf{b} + \gamma \mathbf{c} \\
 &= A + \beta (B - A) + \gamma (C - A) \\
 &= \underbrace{(1 - \beta - \gamma)}_{\alpha} A + \beta B + \gamma C \\
 &= \alpha A + \beta B + \gamma C
 \end{aligned}$$

mit  $\alpha + \beta + \gamma = 1$

Das funktioniert auch mit einem Dreieck im  $\mathbb{R}^n$ ; die Zeichnung hier befindet sich dann in der Ebene des Dreiecks!



# Häufige Aufgabe

- Bestimme die baryzentrischen Koordinaten eines Punktes  $P$  bzgl. des Dreiecks  $A, B, C$

- Lösungsweg 1:

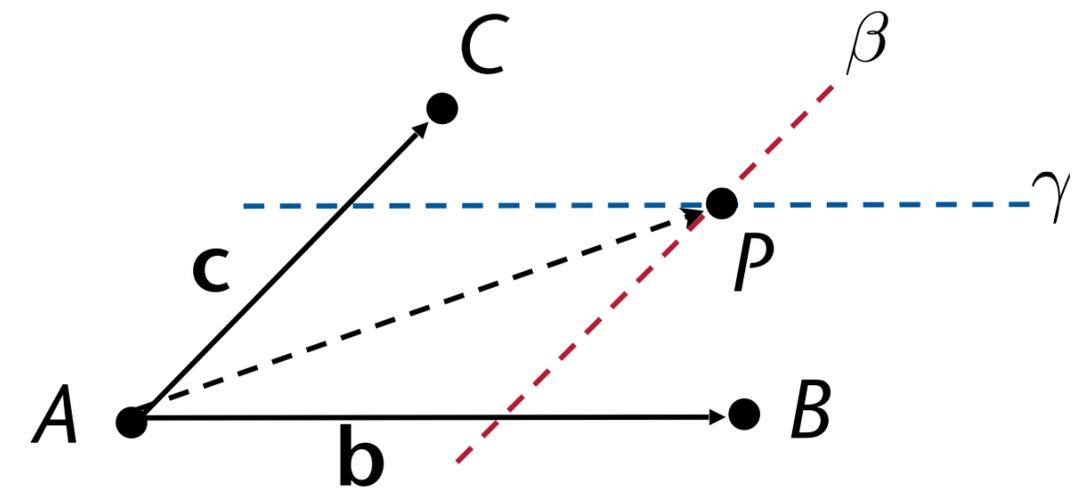
- Setze  $\mathbf{b} = B - A$ ,  $\mathbf{c} = C - A$ ,  $\mathbf{q} = P - A$

- Ansatz:  $\beta \mathbf{b} + \gamma \mathbf{c} \stackrel{!}{=} \mathbf{q}$

- Löse das LGS

$$\begin{pmatrix} b_x & c_x \\ b_y & c_y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \beta \\ \gamma \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} q_x \\ q_y \end{pmatrix}$$

- Setze  $\alpha = 1 - \beta - \gamma$

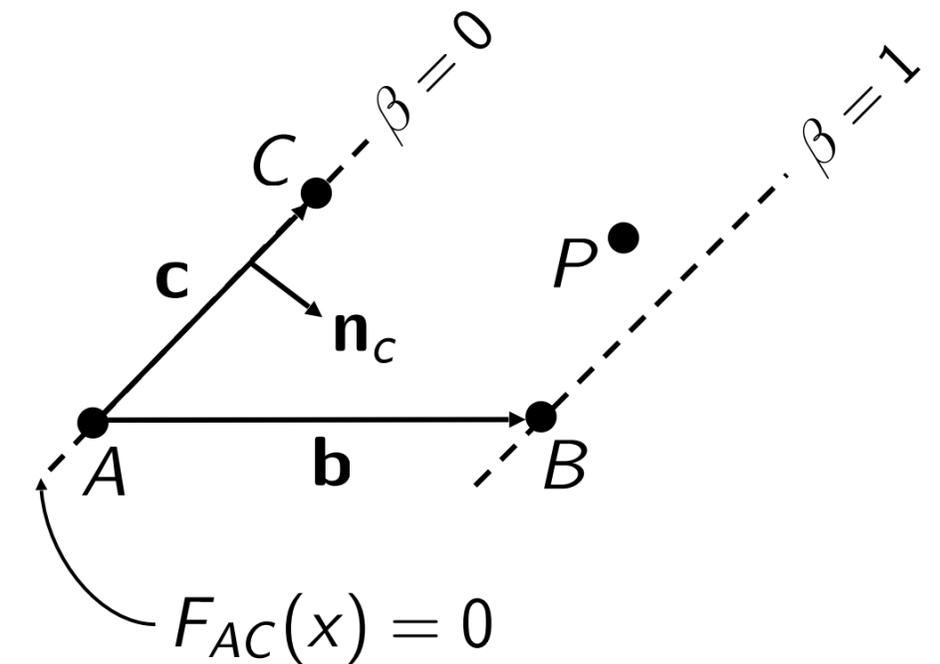


# Lösungsweg 2

- Verwende die Beobachtung: alle Punkte  $P$  mit dem selben Abstand von der Geraden  $\overline{AC}$  haben dieselbe baryzentrische Koordinate

- Setze

$$F_{AC}(P) := \frac{n_c \cdot (P - A)}{\underbrace{n_c \cdot (B - A)}_{\text{Normierung}}} \quad n_c := \begin{pmatrix} c_y \\ -c_x \end{pmatrix}$$



- Damit ist  $F_{AC}(A) = F_{AC}(C) = 0$ ,  
und  $F_{AC}(B) = 1$  (wegen Normierung)
- Definiere analog  $F_{AB}$  und  $F_{BC}$
- Damit ist  $\alpha = F_{BC}(P)$ ,  $\beta = F_{AC}(P)$ ,  $\gamma = F_{AB}(P)$

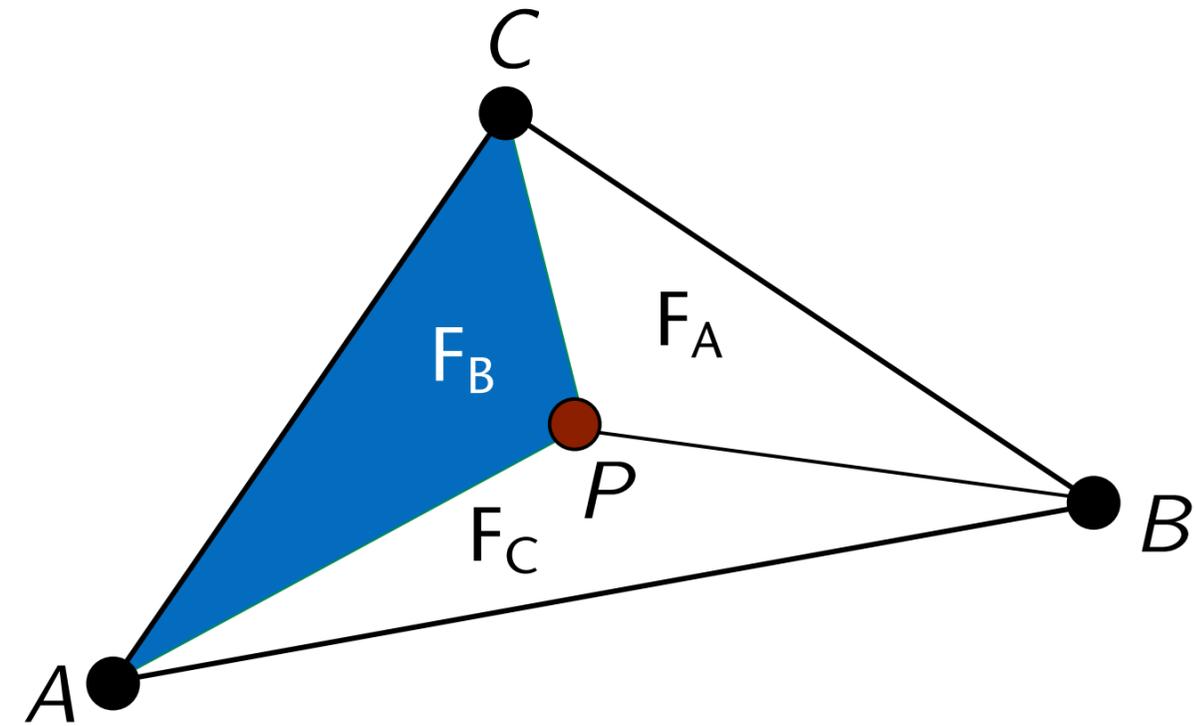
# Lösungsweg 3

- Nutze den geometrischen Zusammenhang zwischen Flächeninhalten und baryzentrische Koordinaten:

$$F_A(P) = F(\Delta PBC)$$

$$F = F_A + F_B + F_C$$

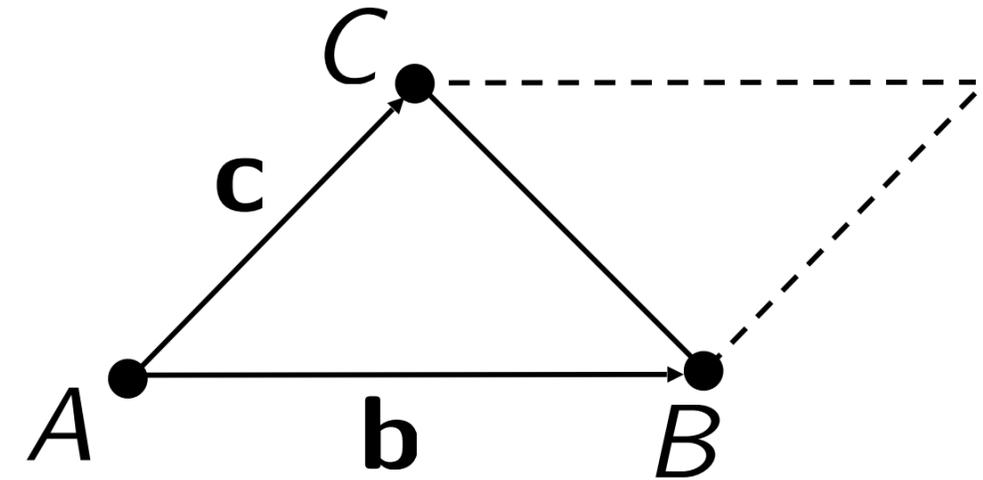
$$\alpha = \frac{F_A}{F} \quad \beta = \frac{F_B}{F} \quad \gamma = \frac{F_C}{F}$$



# Erinnerung

- Flächeninhalt eines Dreiecks  $A, B, C$  ist

$$\begin{aligned}
 \mathcal{A}(\Delta ABC) &= \frac{1}{2} \|\mathbf{b} \times \mathbf{c}\| \\
 &= \frac{1}{2} \|(B - A) \times (C - A)\|
 \end{aligned}$$

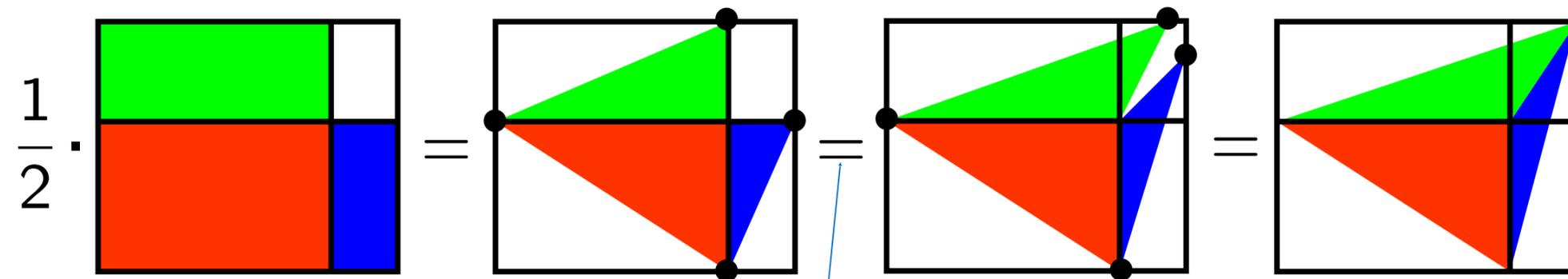
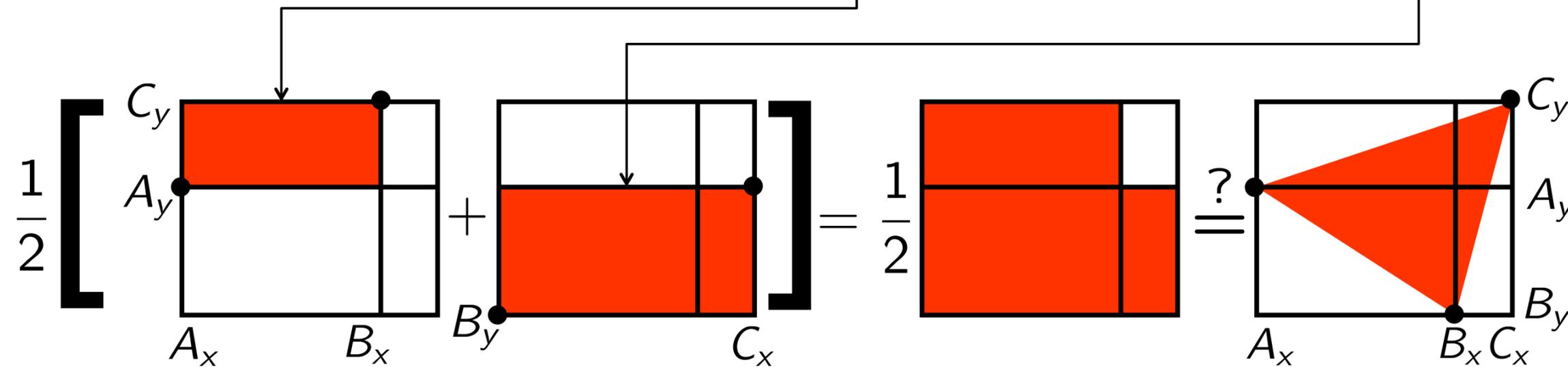


$$= \frac{1}{2} \begin{vmatrix} B_x - A_x & C_x - A_x \\ B_y - A_y & C_y - A_y \end{vmatrix} = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} A_x & B_x & C_x \\ A_y & B_y & C_y \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

- Achtung: Achte auf den korrekten Umlaufsinn !!
- Beobachtung: Flächeninhalt = 0  $\Leftrightarrow$  Det = 0  $\Leftrightarrow$  Dreieck ist degeneriert  $\Leftrightarrow$  Punkte sind nicht affin unabhängig

# Exkurs: Geometrischer Beweis der Flächenformel

- Zu zeigen:  $\mathcal{F}(\Delta ABC) = \frac{1}{2} [(B_x - A_x)(C_y - A_y) - (C_x - A_x)(B_y - A_y)]$



denn  $\mathcal{F}(\text{Dreieck}) = \frac{1}{2} \cdot \text{Basis} \cdot \text{Höhe}$

# Beweis der Lösung 3

- Gegeben sei ein Dreieck  $A, B, C$ , und darin ein Dreieck  $P, Q, R$
- Die baryzentrischen Koordinaten von  $P, Q, R$  bzgl.  $A, B, C$  seien

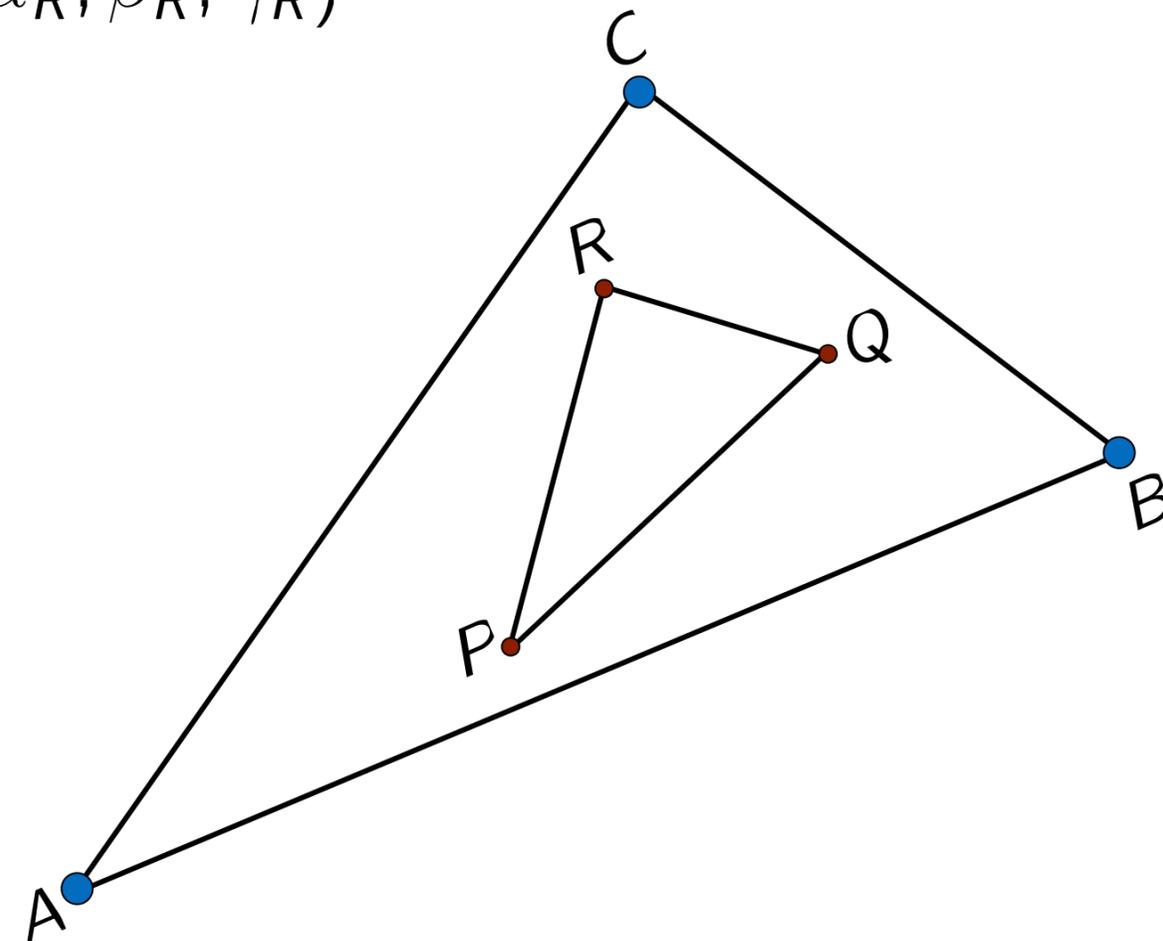
$$P : (\alpha_P, \beta_P, \gamma_P) \quad Q : (\alpha_Q, \beta_Q, \gamma_Q) \quad R : (\alpha_R, \beta_R, \gamma_R)$$

d.h.

$$P = \alpha_P A + \beta_P B + \gamma_P C$$

- Generalized Routh's Theorem:

$$\mathcal{A}(\Delta PQR) = \begin{vmatrix} \alpha_P & \beta_P & \gamma_P \\ \alpha_Q & \beta_Q & \gamma_Q \\ \alpha_R & \beta_R & \gamma_R \end{vmatrix} \cdot \mathcal{A}(\Delta ABC)$$



# Beweisskizze für Routh's Theorem

- Zur Erinnerung: Determinanten sind linear, d.h.

$$\begin{vmatrix} \vdots & \vdots & \vdots \\ sa + tb & \mathbf{c} & \mathbf{d} \\ \vdots & \vdots & \vdots \end{vmatrix} = s \cdot \begin{vmatrix} \vdots & \vdots & \vdots \\ \mathbf{a} & \mathbf{c} & \mathbf{d} \\ \vdots & \vdots & \vdots \end{vmatrix} + t \cdot \begin{vmatrix} \vdots & \vdots & \vdots \\ \mathbf{b} & \mathbf{c} & \mathbf{d} \\ \vdots & \vdots & \vdots \end{vmatrix}$$

- Damit braucht man  $\mathcal{A}(\Delta PQR)$  nur noch ausrechnen:

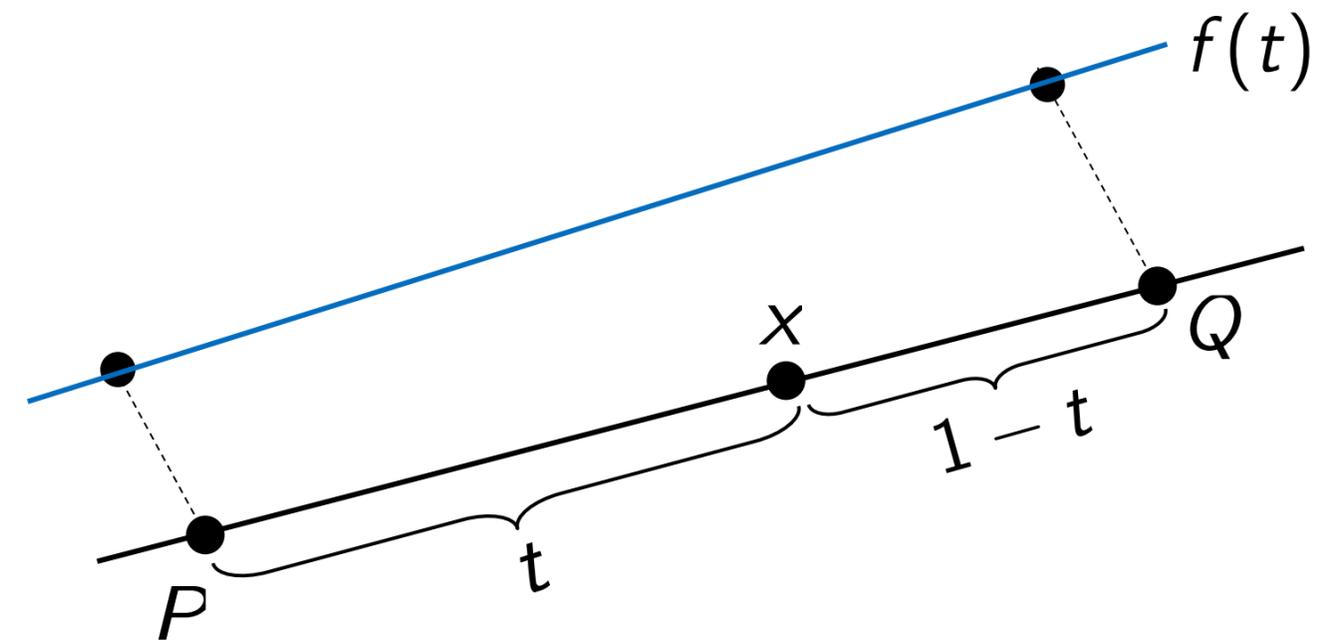
$$2\mathcal{A}(\Delta PQR) =$$

$$\begin{vmatrix} P_x & Q_x & R_x \\ P_y & Q_y & R_y \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \alpha_P A_x + \beta_P B_x + \gamma_P C_x & \alpha_Q A_x + \beta_Q B_x + \gamma_Q C_x & \alpha_R A_x + \beta_R B_x + \gamma_R C_x \\ \alpha_P A_y + \beta_P B_y + \gamma_P C_y & \alpha_Q A_y + \beta_Q B_y + \gamma_Q C_y & \alpha_R A_y + \beta_R B_y + \gamma_R C_y \\ \underbrace{\alpha_P + \beta_P + \gamma_P}_1 & \alpha_Q + \beta_Q + \gamma_Q & \alpha_R + \beta_R + \gamma_R \end{vmatrix} \quad (1)$$

$$\begin{aligned}
 &= \alpha_P \cdot \begin{vmatrix} A_x & \dots \text{s. eq. (1)} \dots & \dots \\ A_y & \dots & \dots \\ 1 & \dots & \dots \end{vmatrix} + \beta_P \cdot \begin{vmatrix} B_x & \dots & \dots \\ B_y & \dots & \dots \\ 1 & \dots & \dots \end{vmatrix} + \gamma_P \cdot \begin{vmatrix} C_x & \dots & \dots \\ C_y & \dots & \dots \\ 1 & \dots & \dots \end{vmatrix} \\
 &= \alpha_P \cdot \left( \underbrace{\alpha_Q \begin{vmatrix} A_x & A_x & \dots \\ A_y & A_y & \dots \\ 1 & 1 & \dots \end{vmatrix}}_0 + \beta_Q \begin{vmatrix} A_x & B_x & \dots \\ A_y & B_y & \dots \\ 1 & 1 & \dots \end{vmatrix} + \gamma_Q \begin{vmatrix} A_x & C_x & \dots \\ A_y & C_y & \dots \\ 1 & 1 & \dots \end{vmatrix} \right) \\
 &\quad + \beta_P \cdot \left( \alpha_Q \begin{vmatrix} B_x & A_x & \dots \\ B_y & A_y & \dots \\ 1 & 1 & \dots \end{vmatrix} + \underbrace{\beta_Q \begin{vmatrix} B_x & B_x & \dots \\ B_y & B_y & \dots \\ 1 & 1 & \dots \end{vmatrix}}_0 + \gamma_Q \begin{vmatrix} B_x & C_x & \dots \\ B_y & C_y & \dots \\ 1 & 1 & \dots \end{vmatrix} \right) \\
 &\quad + \gamma_P \cdot \left( \alpha_Q \begin{vmatrix} C_x & A_x & \dots \\ C_y & A_y & \dots \\ 1 & 1 & \dots \end{vmatrix} + \beta_Q \begin{vmatrix} C_x & B_x & \dots \\ C_y & B_y & \dots \\ 1 & 1 & \dots \end{vmatrix} + \underbrace{\gamma_Q \begin{vmatrix} C_x & C_x & \dots \\ C_y & C_y & \dots \\ 1 & 1 & \dots \end{vmatrix}}_0 \right) = \dots
 \end{aligned}$$

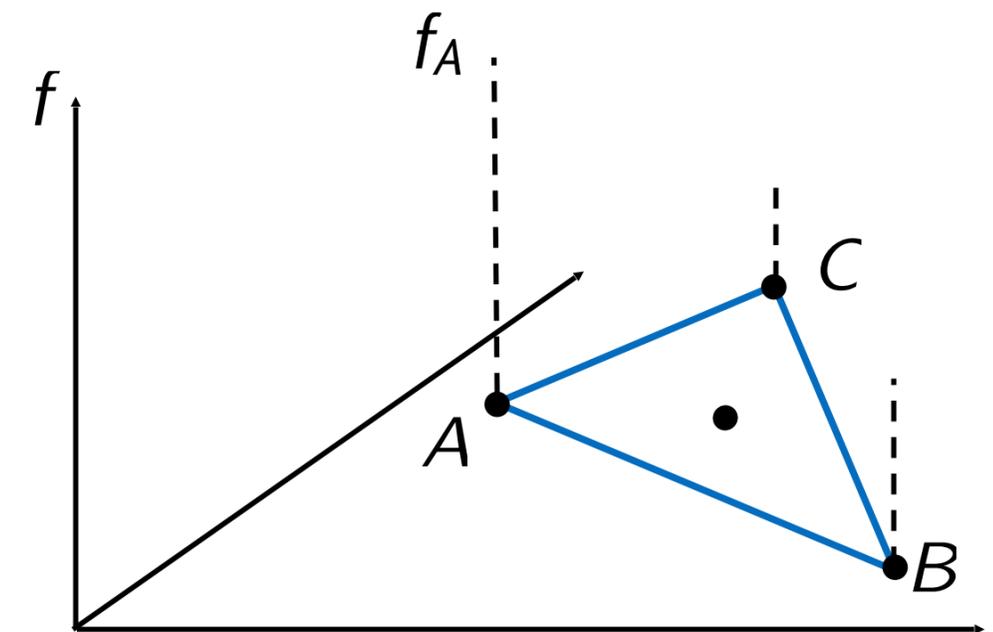
# Erinnerung: lineare Interpolation

- Sei ein skalarer Wert an  $P$  und  $Q$  vorgegeben:  $f(P)=f_1$ ,  $f(Q)=f_2$
- Dann kann man jedem Punkt  $X$  auf der Geraden  $\overline{PQ}$  einen Wert  $f(X)$  zuordnen
- Sei  $t$  der Parameter von  $X$ , also  $X = (1 - t) \cdot P + t \cdot Q$
- Dann setze  $f(X) = (1 - t) \cdot f(P) + t \cdot f(Q)$



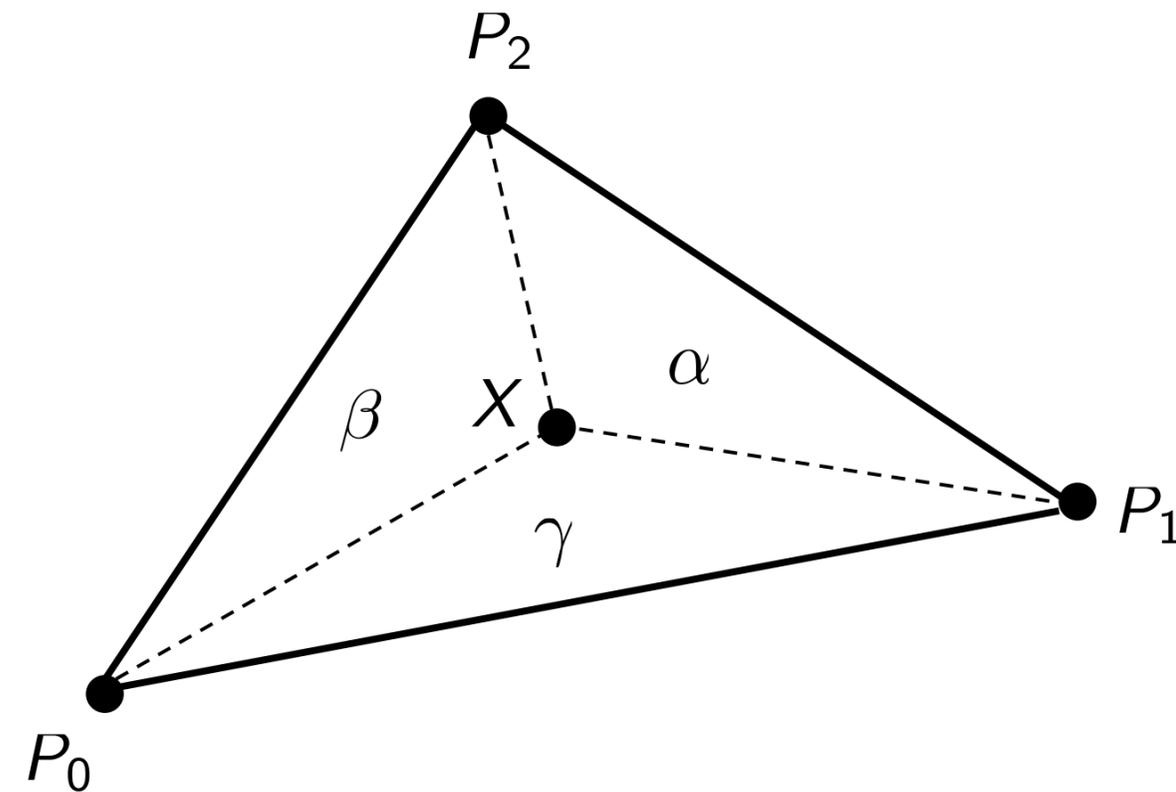
# Baryzentrische Interpolation

- Gegeben: "Höhen"  $f_A, f_B, f_C$  an den Punkten  $A, B, C$  (z.B.  $f =$  Grauwerte)
- Gesucht: eine Funktion  $f$ , so daß die  $f_A, f_B, f_C$  interpoliert werden
- Idee: für einen beliebigen Punkt  $X$ , bestimme dessen baryzentrische Koordinaten, interpoliere damit die Funktionswerte
- Konkret: Sei  $X = \alpha A + \beta B + \gamma C$
- Setze  $f(X) = \alpha f_A + \beta f_B + \gamma f_C$
- Funktioniert auch für  $X$  außerhalb  $\Delta ABC$
- Funktioniert auch für  $f_A, f_B, f_C \in \mathbb{R}^m$
- Bemerkung: Auf den Kanten des Dreiecks entspricht dies gerade einer *linearen Interpolation*



# Weitere Anwendung: Punkt-in-Dreieck-Test

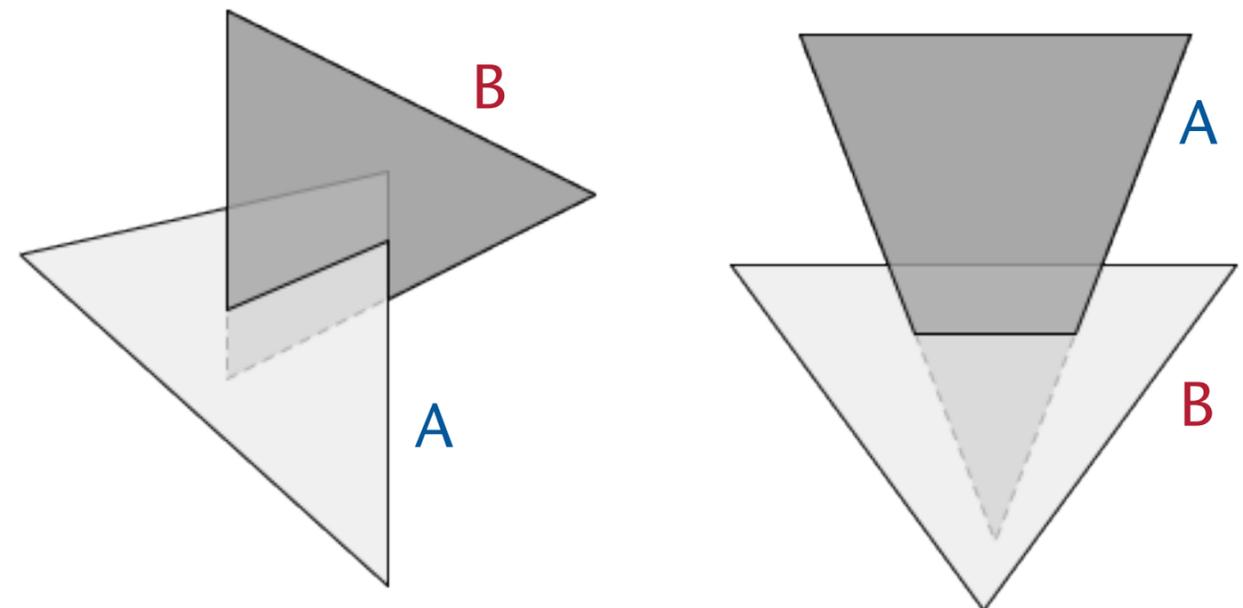
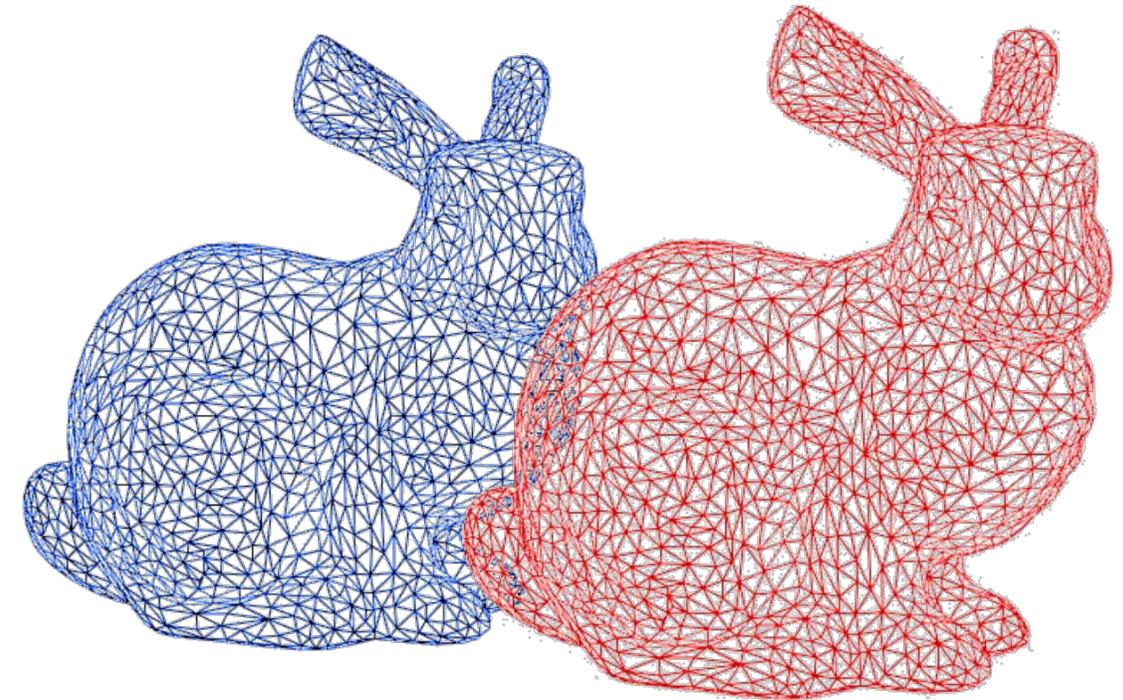
- Der Punkt  $X$  ist im Inneren des Dreiecks  $\Leftrightarrow \alpha, \beta, \gamma > 0$



# Anwendung: kürzester Abstand zwischen Punkt und Dreieck

# Anwendung: Schnittest Dreieck-Dreieck

- Das Problem "Collision Detection":
  - Finde ein (oder alle) Paare von Polygonen, die sich schneiden (*witnesses*)
  - Viele pfiffige Verfahren, aber Grundoperation am Ende ist immer ein Polygon-Polygon-Schnittest
- Vereinfachung: zwei Dreiecke
- Verfahren:
  - Teste alle Kanten von B auf Schnitt gegen A
  - Und nochmal umgekehrt
  - Abbruch, sobald der erste Schnitt gefunden



# Schnitt Kante-Dreieck

- Ansatz

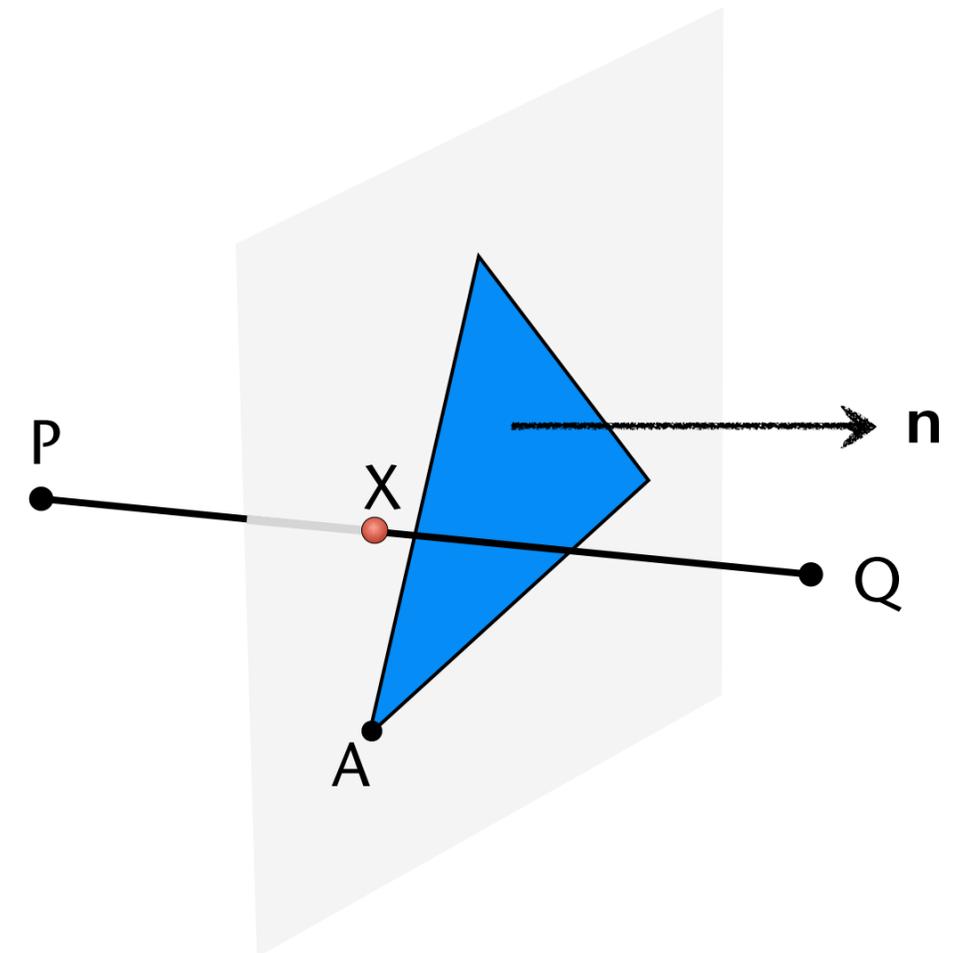
- Ebenengleichung:  $\mathbf{n} \cdot X - d = 0$

- Liniengleichung:  $X = P + t\mathbf{r}, \quad \mathbf{r} = Q - P$

- Einsetzen:  $t(\mathbf{n} \cdot \mathbf{r}) - d + \mathbf{n}P = 0$

$$\Rightarrow t = \frac{d - \mathbf{n}A}{\mathbf{n}\mathbf{r}}$$

- Check:  $t \in [0,1]$ ; falls nein  $\rightarrow$  kein Schnitt; falls ja  $\rightarrow$  X ausrechnen
- Baryzentrische Koordinaten für X berechnen  $\rightarrow \alpha, \beta, \gamma$
- Check:  $\alpha, \beta, \gamma > 0$  ; falls ja  $\rightarrow$  Schnitt

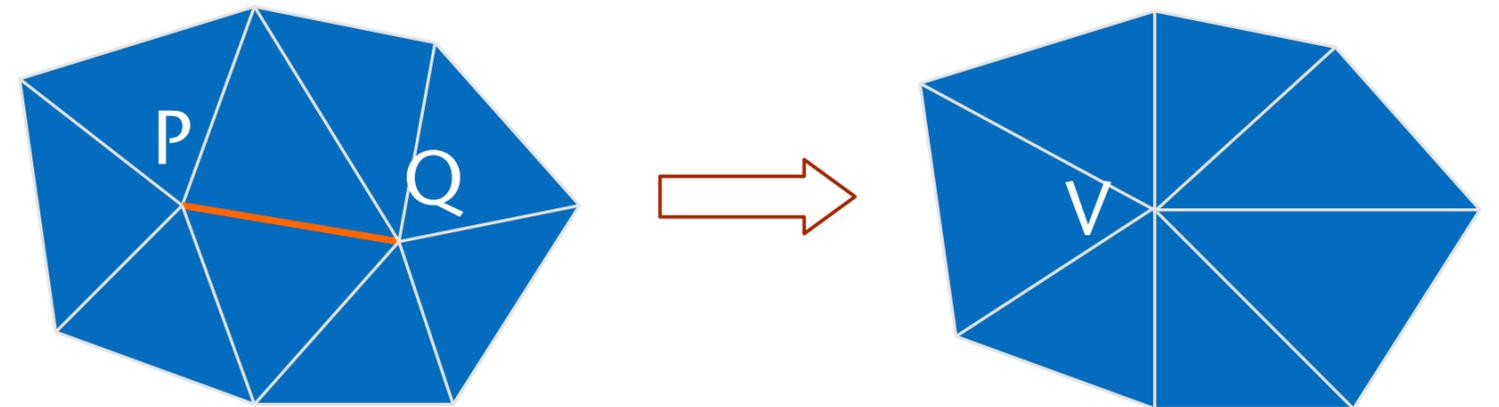


# Anwendung: Mesh Simplification

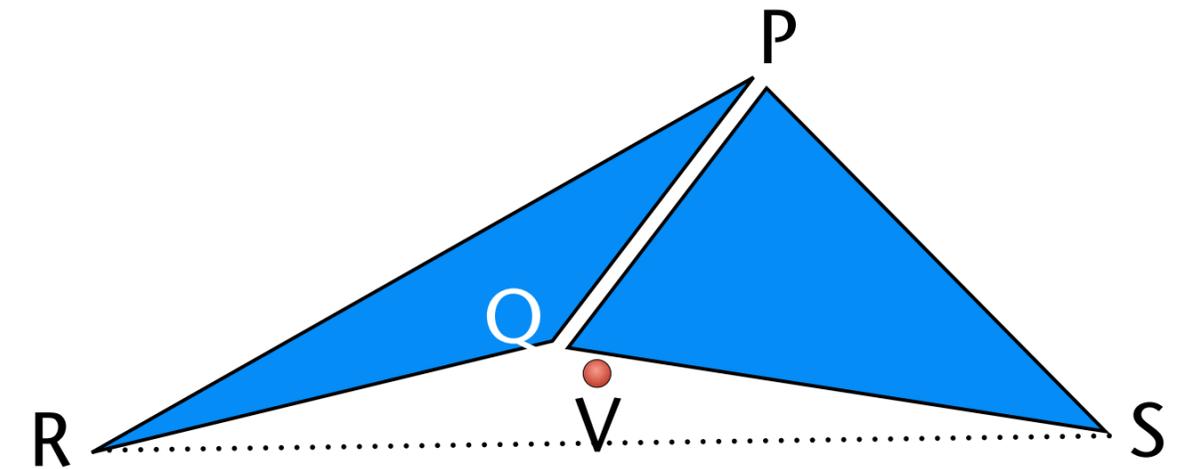
- Ziel: erzeuge "low-poly" meshes aus gegebenem "high-poly" Input



- Fundamentale Operation: edge collapse

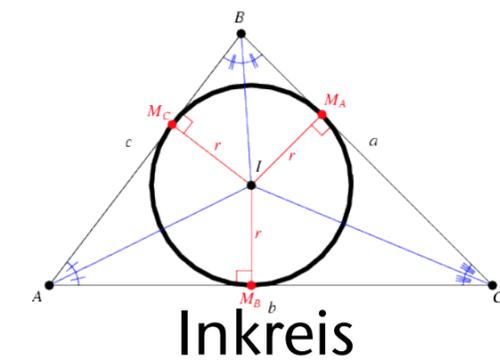
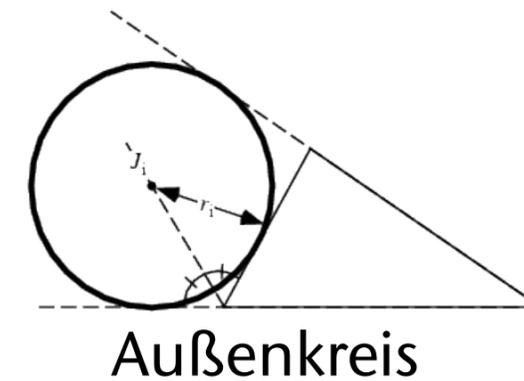
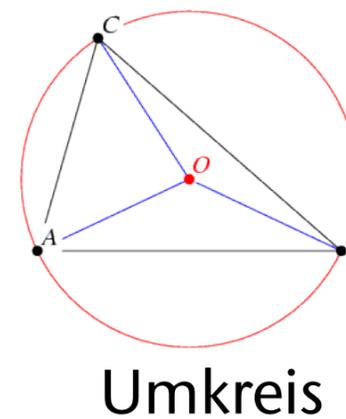
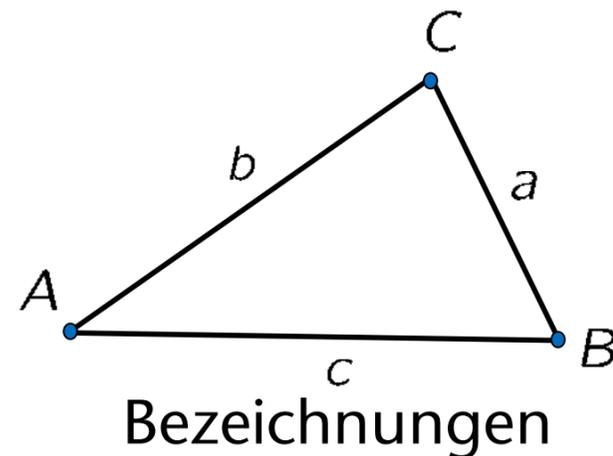


- Position von  $V$  wird durch Simplifizierungsalgorithmus bestimmt
- Problem: berechne Farbe (u.a. Attribute) für den neuen Vertex  $V$ 
  - $V$  liegt wahrscheinlich im Inneren des Tetraeders  $PQRS$ , aber nicht notwendigerweise
- Lösung:
  - Berechne baryzentrische Koordinaten von  $V$  bzgl.  $P, Q, R, S \rightarrow \alpha, \beta, \gamma, \delta$
  - Interpoliere damit die Farben der Ecken
  - Welche Fälle können vorkommen?

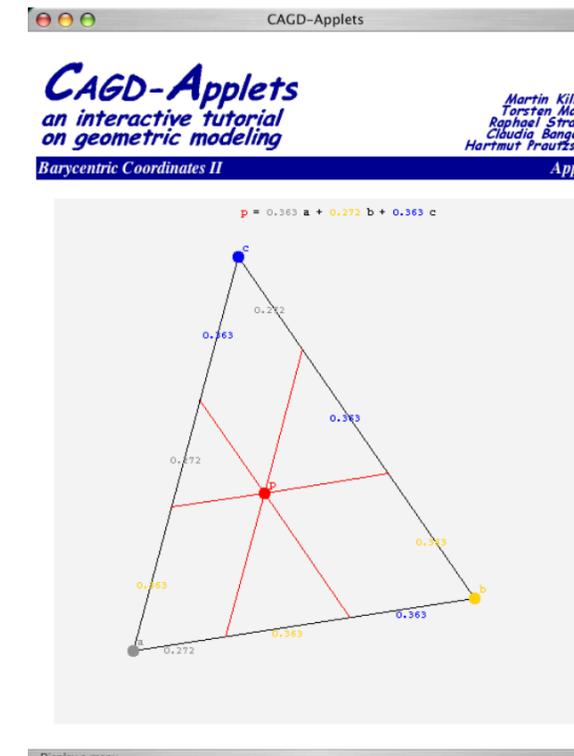
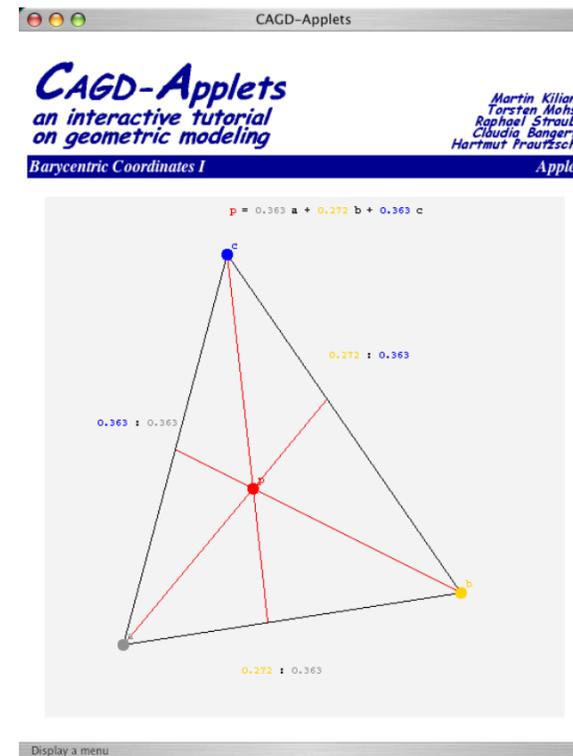
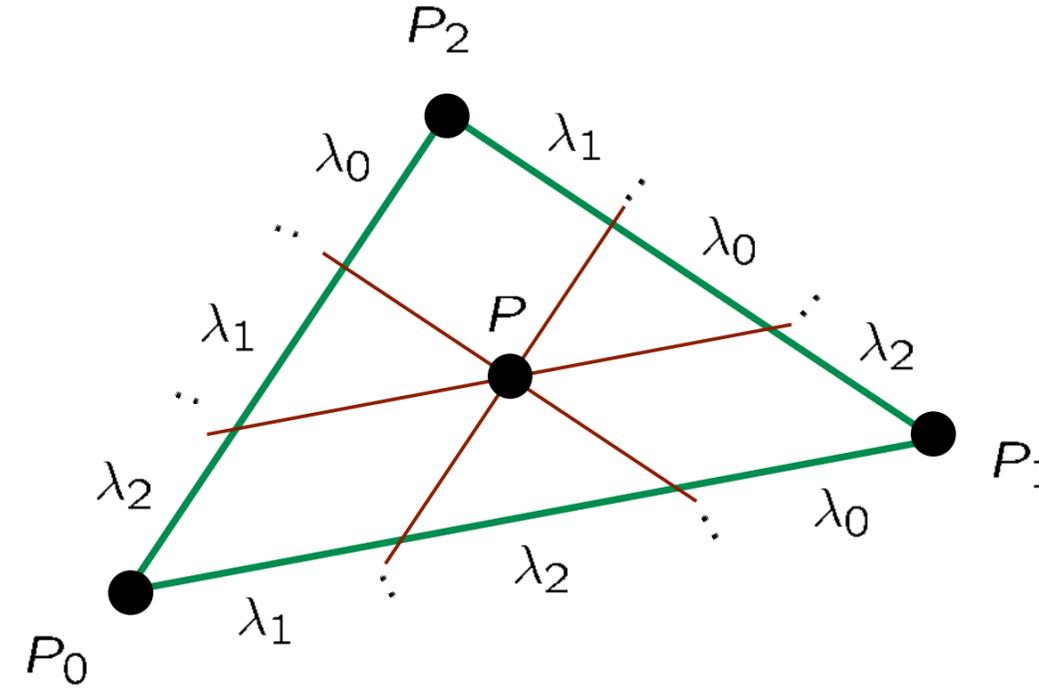
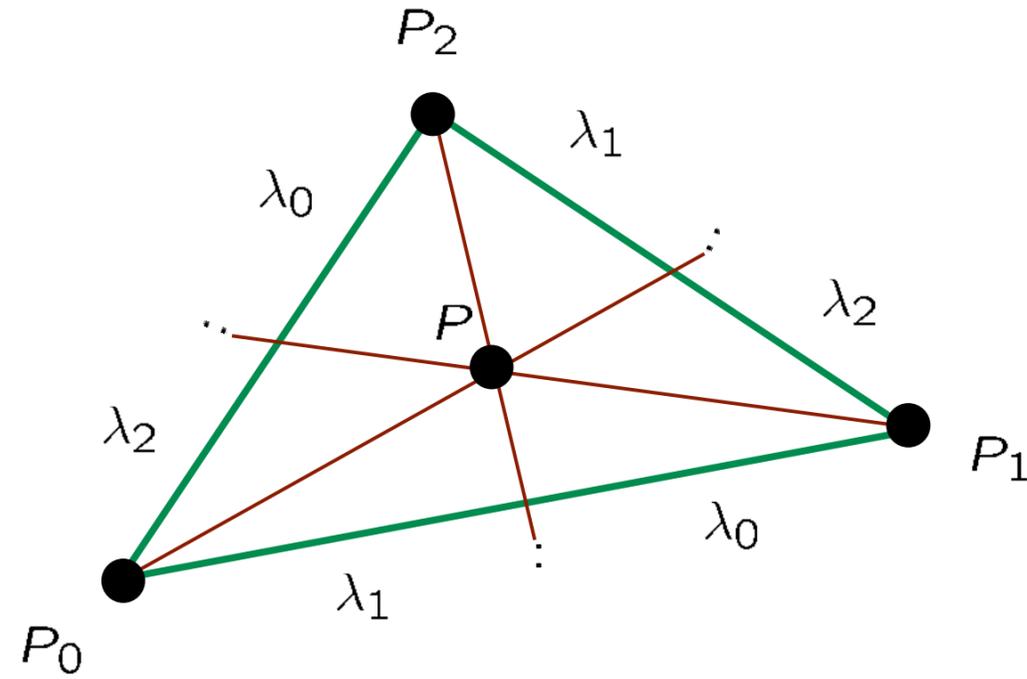


- Viele spezielle Punkte im Dreieck lassen sich mittels baryzentrischer Koordinaten sehr leicht angeben / ausrechnen (o. Bew.):

Punkt	$\alpha$	$\beta$	$\gamma$
Schwerpkt.	1	1	1
Außenkreis zu $A$	$-a$	$b$	$c$
Inkreis	$a$	$b$	$c$
Umkreis	$a^2(b^2 + c^2 - a^2)$	$b^2(c^2 + a^2 - b^2)$	$c^2(a^2 + b^2 - c^2)$



- Achtung: die Koordinaten sind ohne Normierung angegeben – diese muß man also vor einer tatsächlichen Verwendung noch durchführen!



<http://cagd-applets.webarchiv.kit.edu/mocca/html/noplugin/inhalt.html>