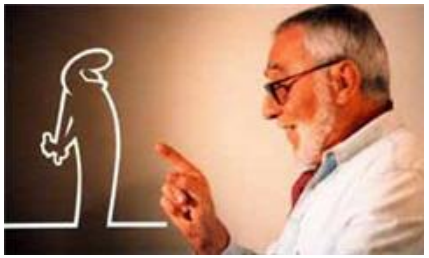
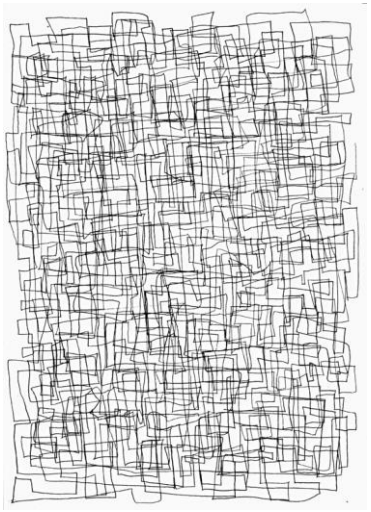
Computergraphik I
Scan Conversion of Lines



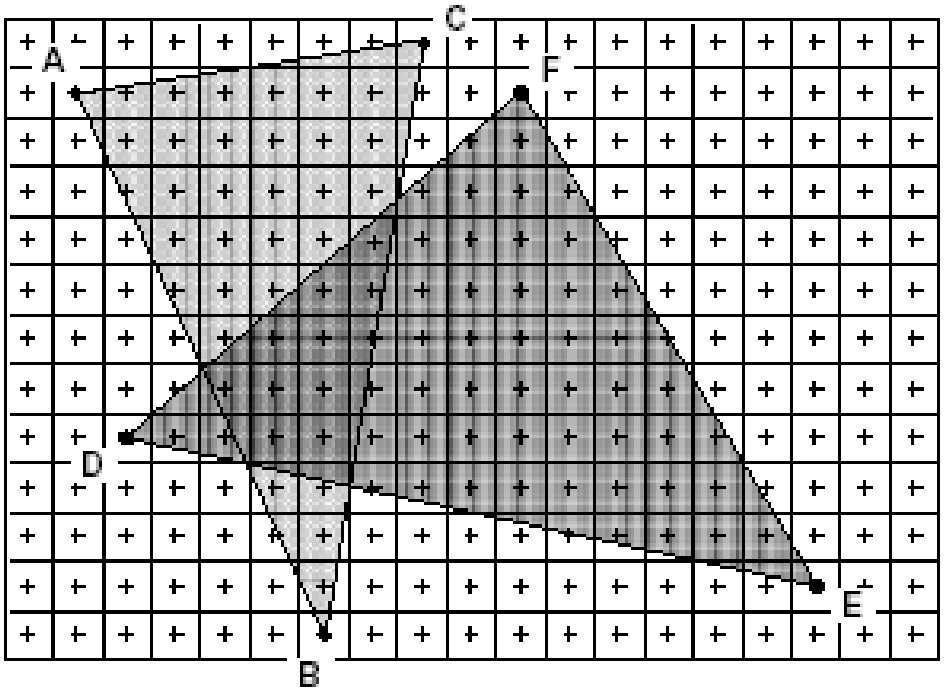


G. Zachmann
University of Bremen, Germany
cgvr.informatik.uni-bremen.de

"La Linea"

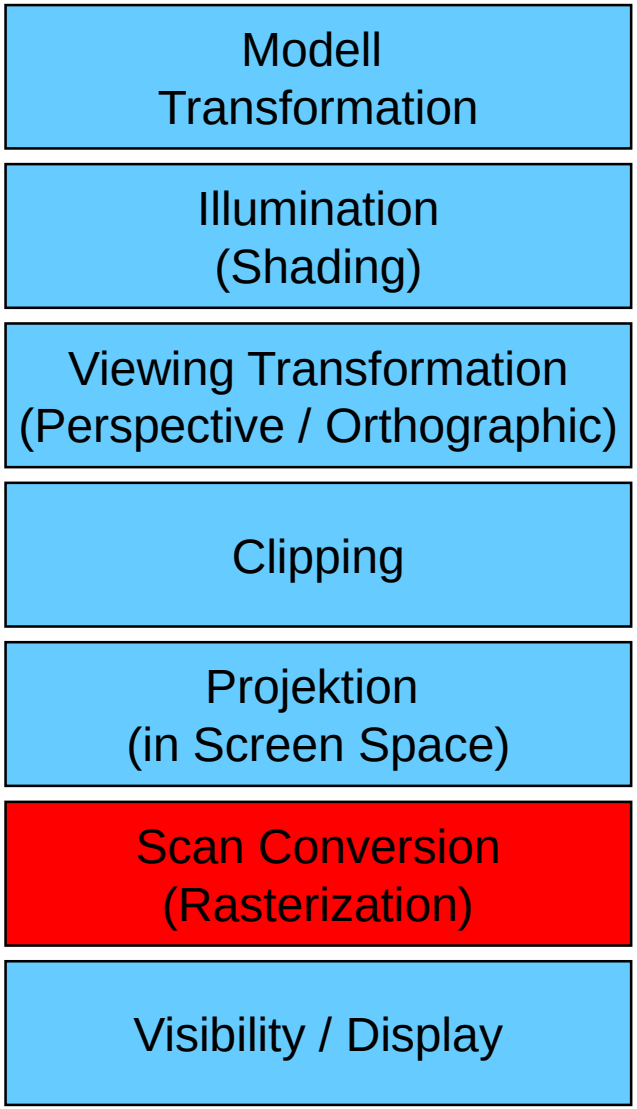
Das Zeichnen von Linien

- Bemerkung: Linien zeichnen war einfacher bei Vektor-Displays ;-)
- Der Begriff Scan-conversion oder Rasterisierung bezeichnet allgemein das algorithmische Bestimmen, welche Pixel von dem Primitiv überdeckt werden
  - Der Name kommt von der Scan-Technik der Rasterdisplay
  - Vorgang = Diskretisierung von kontinuierlichen geometrischen Objekten
  - Zusätzliche Aufgabe: Ecken-Werte interpolieren (z.B. Farbe, Tiefenwert, …)



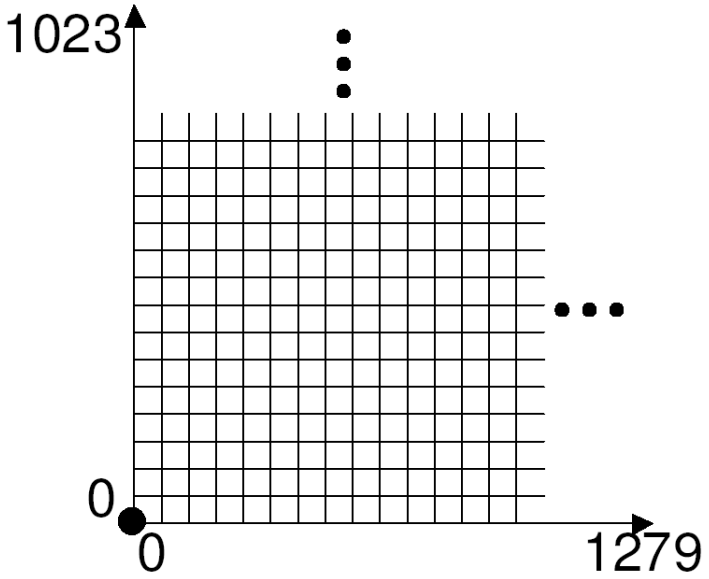
- Scan-Conversion ist grundlegend für 2D und 3D Computergraphik

Einordnung in die Pipeline



Das Frame-Buffer-Modell

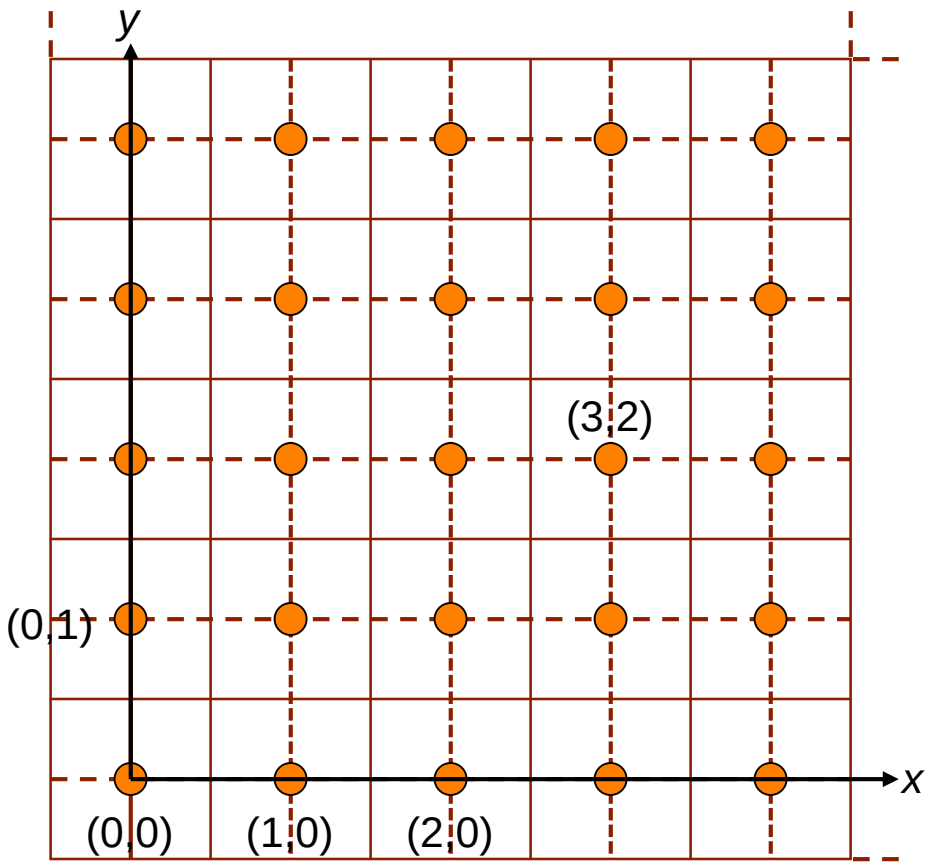
- Adressierung als 2D-Array



- Startadresse:
  - links oben (X11, Java AWT)
  - links unten (Open GL)

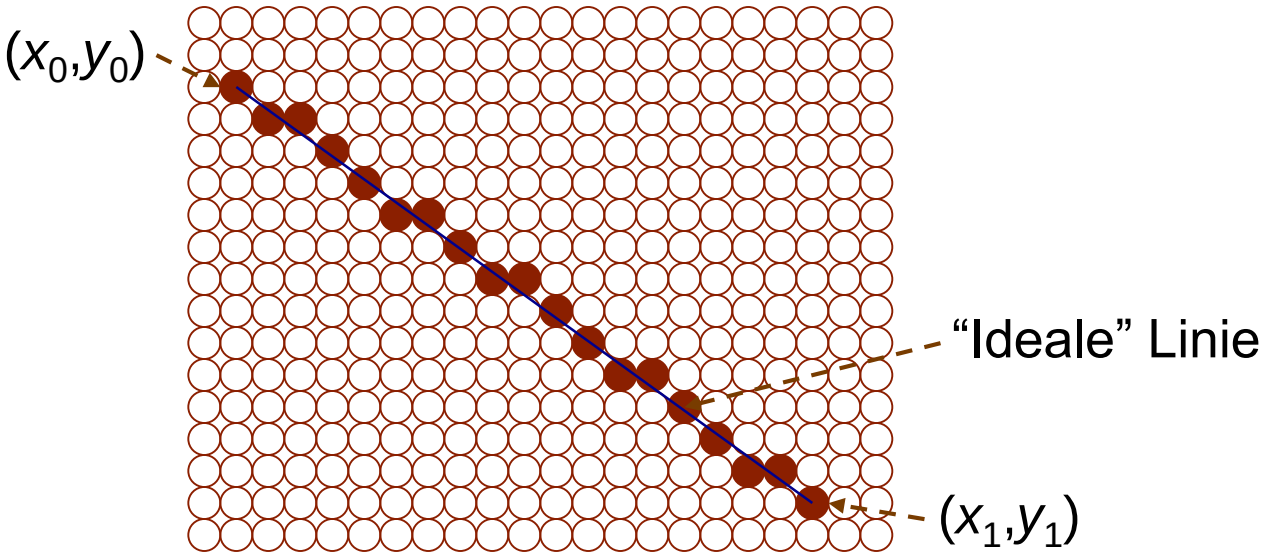
Bildschirmkoordinaten im Frame-Buffer-Modell

- Wir verwenden folgende 2D Bildschirmkoordinaten
  - Ganzzahlige Werte für *Mittelpunkte* der Pixel
  - Senkrecht = Y–Achse, Horizontal = X–Achse



Die Ideale Linie

- Keine Unterbrechungen (diagonale Schritte sind erlaubt)
- Einheitliche Stärke und Helligkeit
- Fehlerfreiheit (setze nur die "nähesten" Pixel an der idealen Linie)
- Geschwindigkeit (wie schnell kann die Linie gezeichnet werden?)
- Invarianz gegenüber Zeichenrichtung



Spezifikation der Aufgabe

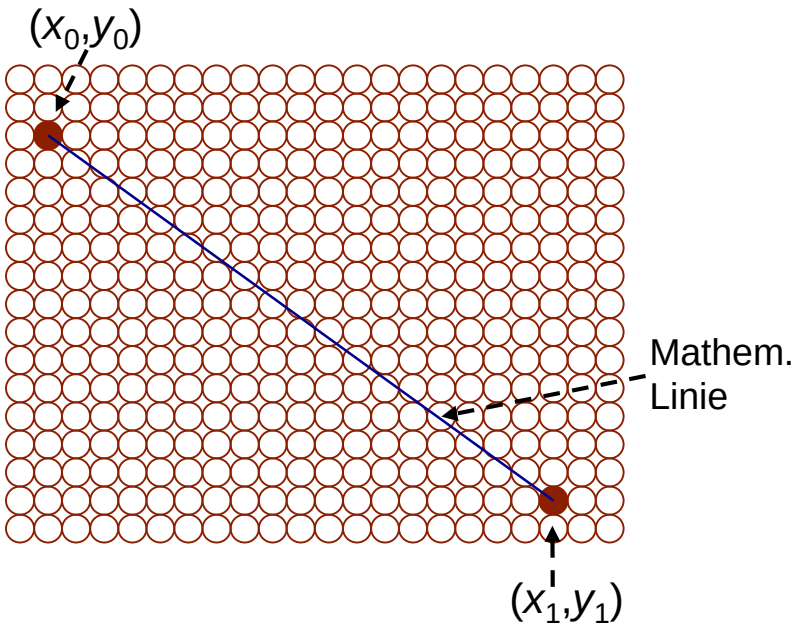
- Gegeben: Endpunktkoordinaten einer Linie
- Ausgabe: Folge von Pixeln (= rasterisierte Linie)
- Vereinfachungen:
  - Ganzzahlige Vertex-Koordinaten
  - Geradengleichung:

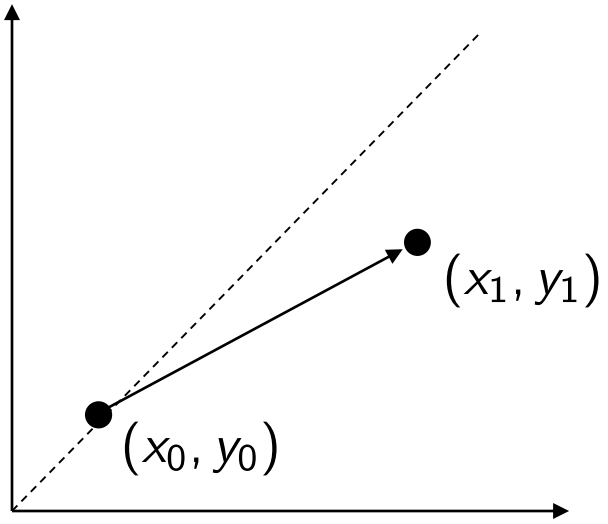
$$y = mx + b$$

mit $0 \leq m \leq 1$

und $x_0 < x_1$.

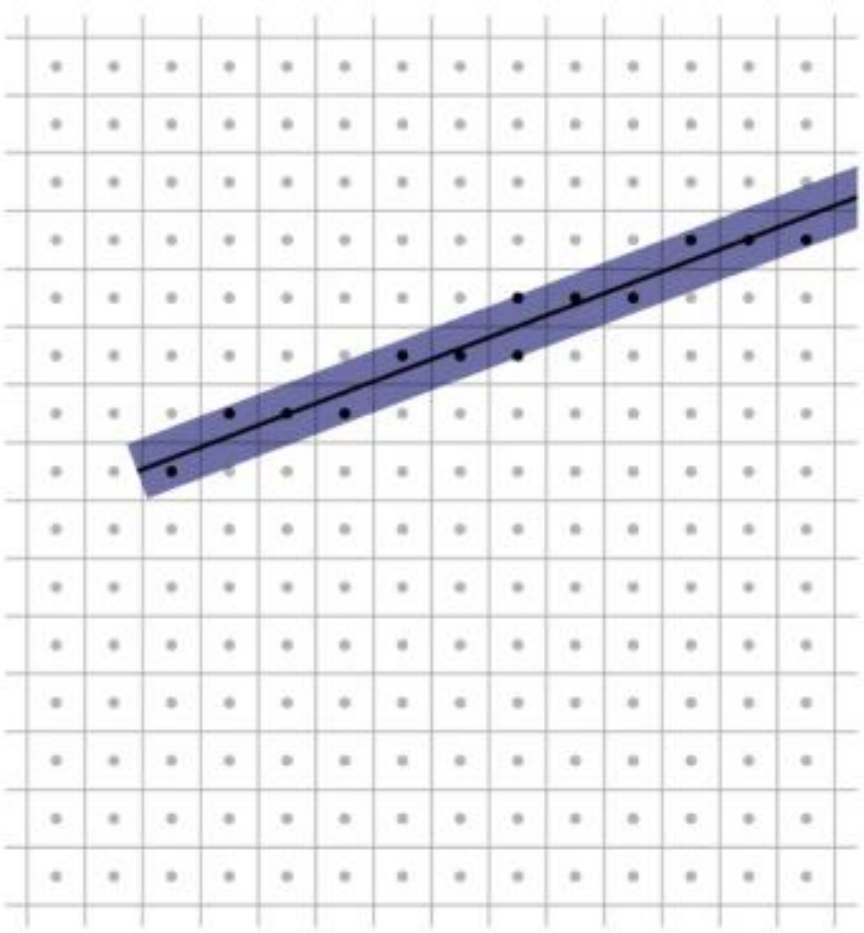
  - Alle übrigen Fälle bekommt man durch Vertauschen / Spiegeln





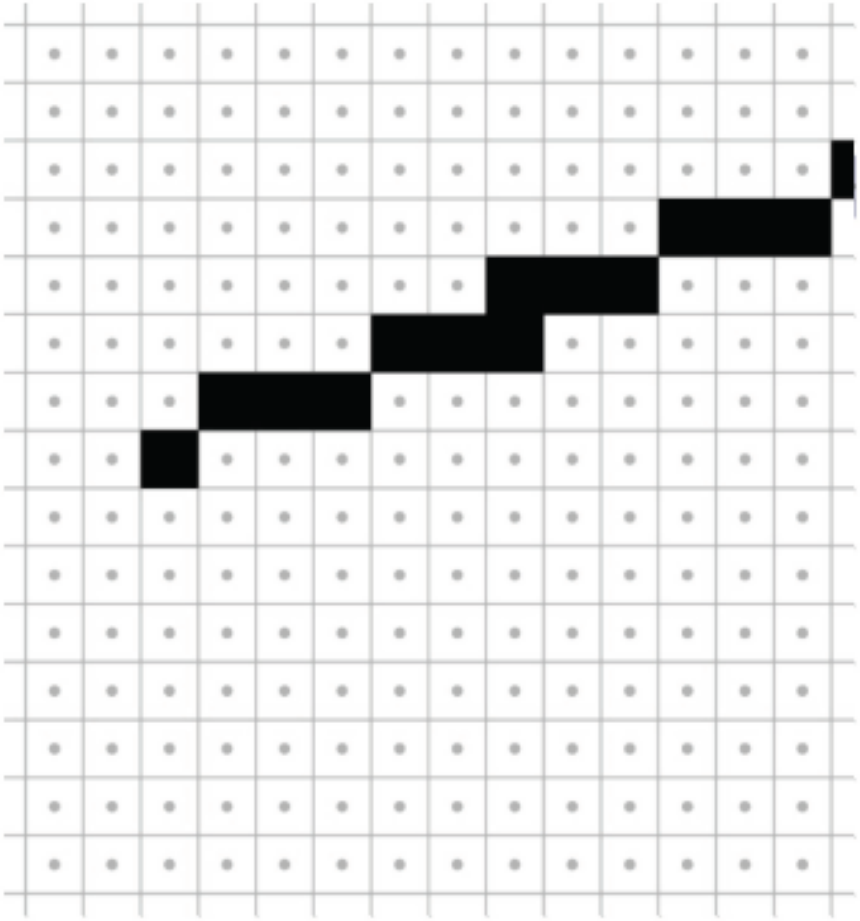
Erster Versuch der Scan-Konv. einer Linie

- Betrachte Linie als schmales Rechteck
- Zeichne alle Pixel, deren Zentrum im Inneren liegt

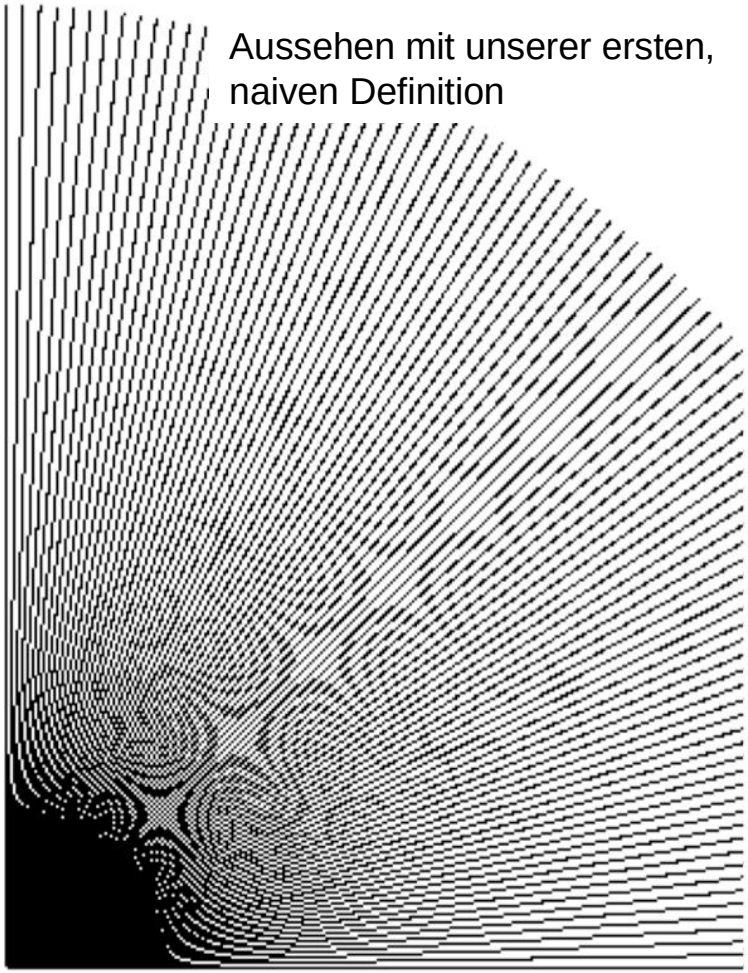


- Betrachte Linie als schmales Rechteck
- Zeichne alle Pixel, deren Zentrum im Inneren liegt

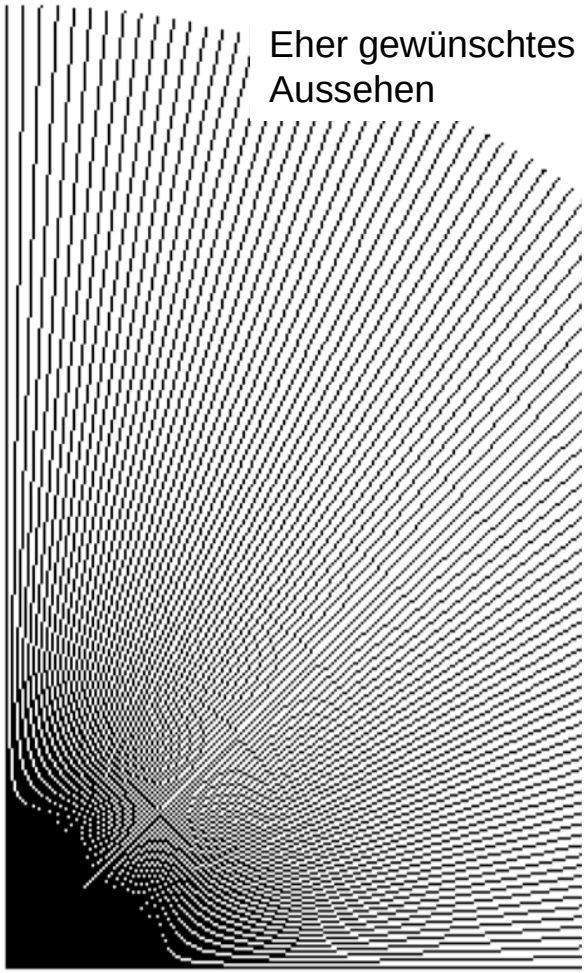
1. Problem: manchmal werden vertikal übereinander liegende Pixel gesetzt → unterschiedliche scheinbare Linienstärke



2. Problem:

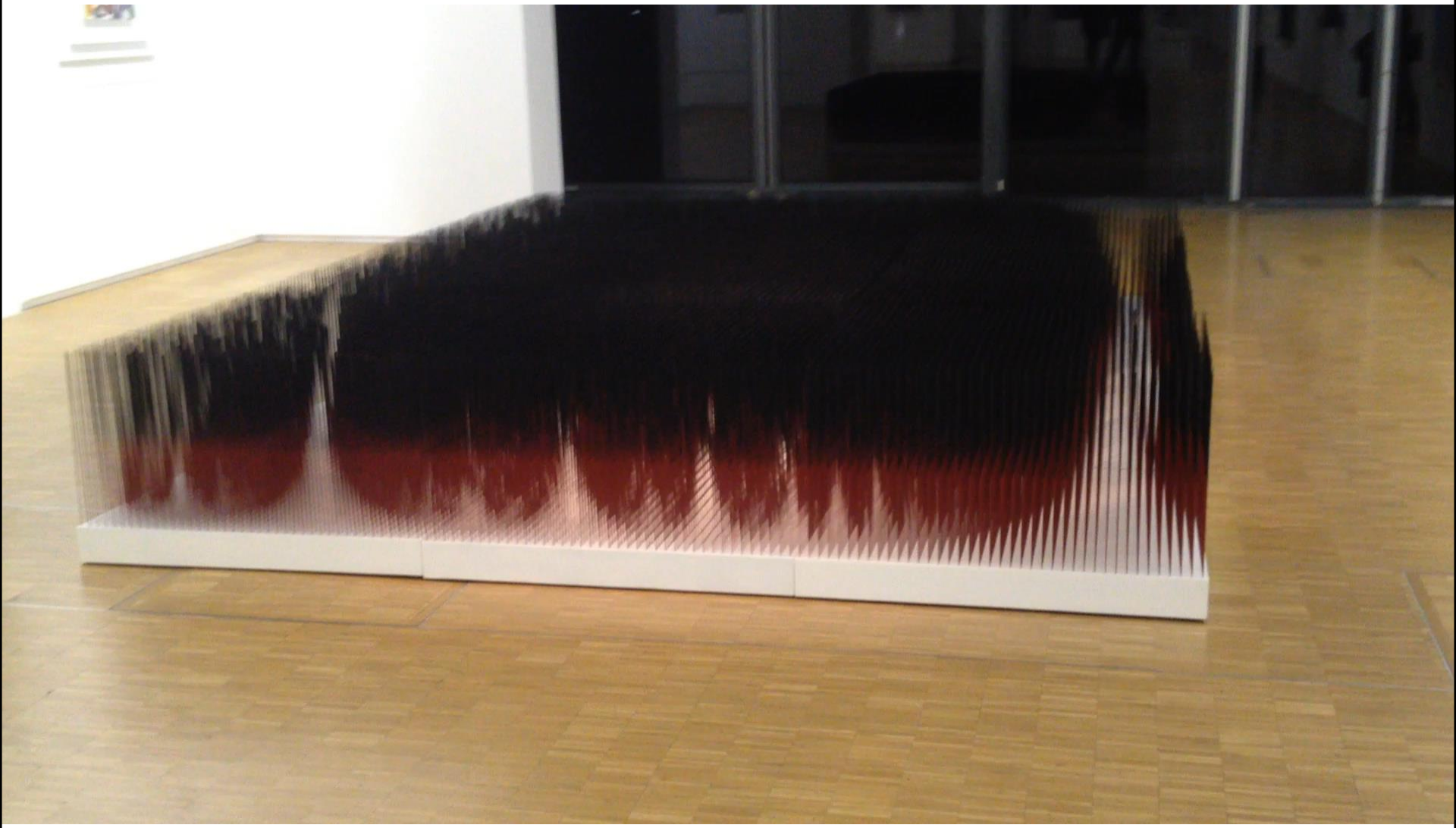


Aussehen mit unserer ersten, naiven Definition



Eher gewünschtes Aussehen

Moireé-Effekt in der Kunst

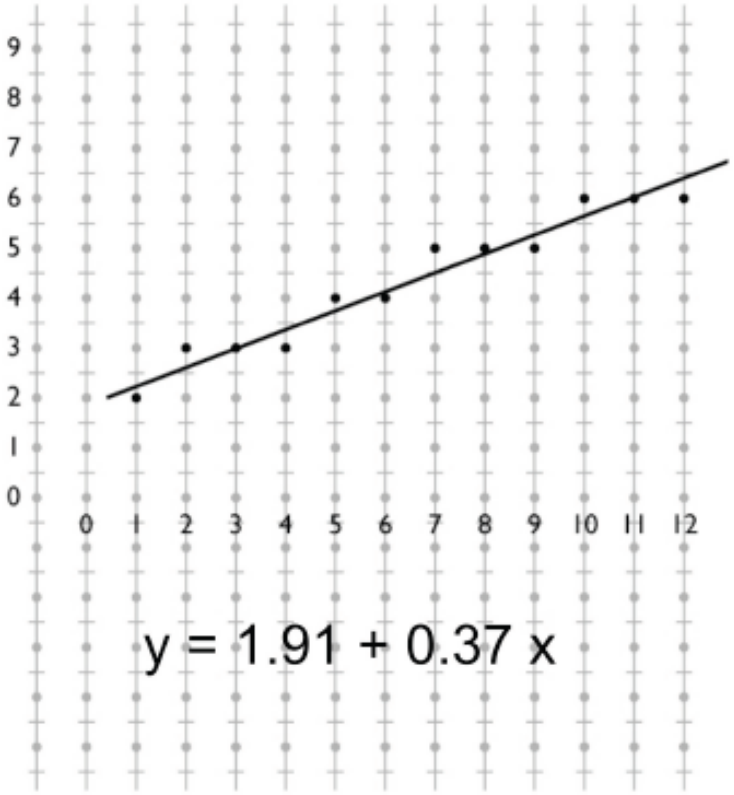


Centre George Pompidou

Erster einfacher Algorithmus

- Einfacher Algorithmus: werte Gleichung der Linie 1 Mal pro Spalte (pro x-Koord.) aus

```
for x = ceil(x0) .. floor(x1):
    y = b + m*x
    setPixel( x, round(y) )
```



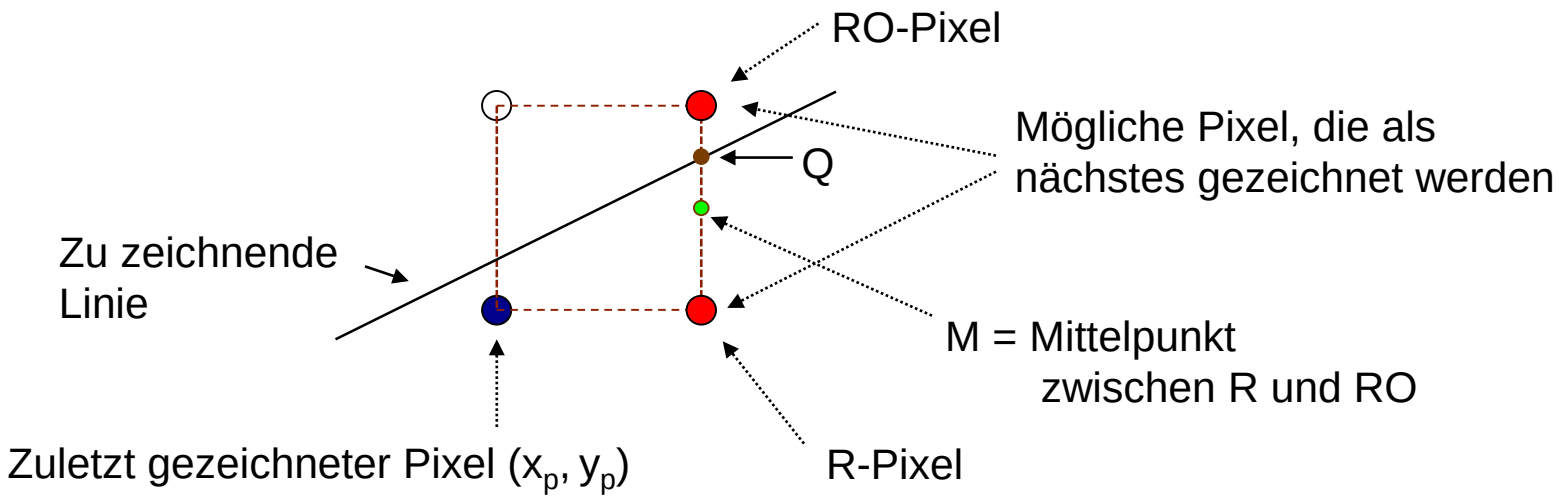
- Probleme:
  - Floating-Point,
  - Mult. und Runden sind (rel.) langsam

Enter Bresenham

Clip from Bresenham's Keynote Talk at WSCG 2003

Generelles Vorgehen und Terminologie

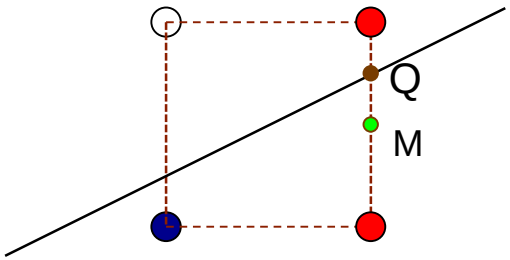
- Bei jedem X-Schritt gibt es nur zwei Möglichkeiten für die Y-Koordinate:
  - entweder bleibt die Y-Koord gleich;
  - oder die Y-Koord erhöht sich um genau 1 Pixel
- Die Situation & Bezeichnungen:



  - Q = Schnittpunkt der Linie mit Gridline $x_P + 1$

Zwei Varianten des Linien-Zeichen-Algos

- Ursprünglicher "Bresenham-Algorithmus" [1962]:
  - Bestimme Distanz zwischen RO und Q und zwischen R und Q
  - Bestimme Differenz zwischen den Distanzen
  - Vorzeichen des Ergebnisses legt fest, welcher Pixel eingefärbt wird
- Heute populärer, der Midpoint-Algo:
  - Bestimme, auf welcher Seite der Linie der Mittelpunkt M liegt
  - M = oberhalb → färbe Pixel R
  - M = unterhalb → färbe Pixel RO

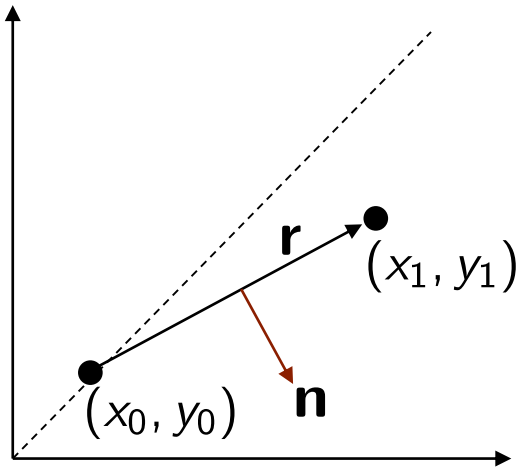


Der Midpoint-Algorithmus

- Wie kann man einfach bestimmen, auf welcher Seite der Linie man sich befindet?
- Verwende implizite Form der Linie:

$$F(x,y) := \mathbf{n} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} - c = 0$$

$$\mathbf{r} = \begin{pmatrix} x_1 - x_0 \\ y_1 - y_0 \end{pmatrix} \quad = \text{ Richtungsvektor}$$



$$\mathbf{n} = \begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 - y_0 \\ x_0 - x_1 \end{pmatrix} \quad \text{ist senkrecht zu } \mathbf{r}$$

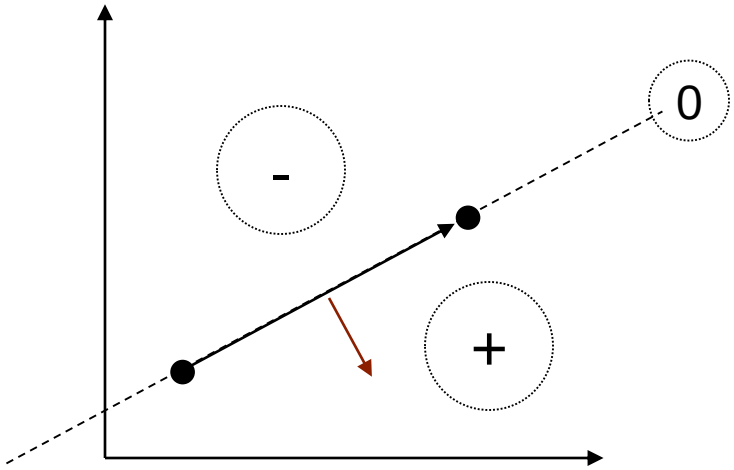
$$F(x_0, y_0) \stackrel{!}{=} 0 \quad \text{liefert } c$$

- Gegeben sei (x, y). Dann ist

  F(x,y) = 0, wenn (x,y) auf der Linie liegt

  F(x,y) < 0, wenn (x,y) oberhalb der Linie liegt

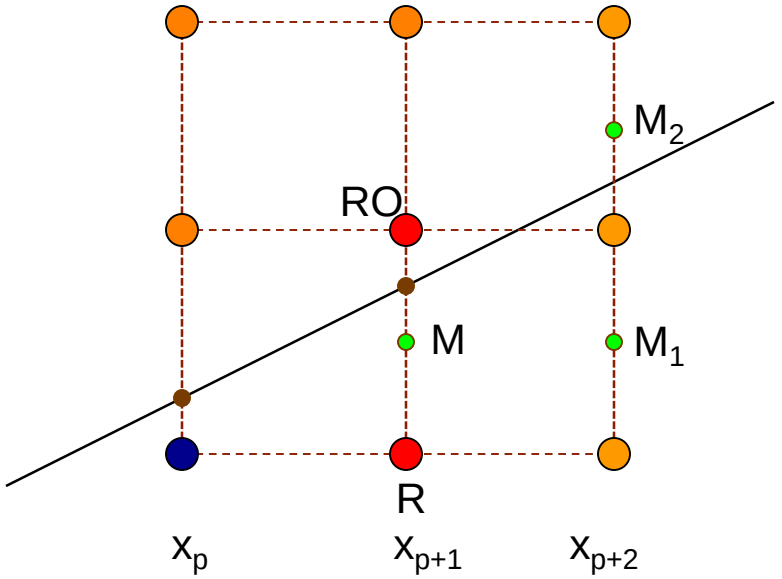
  F(x,y) > 0, wenn (x,y) unterhalb der Linie liegt

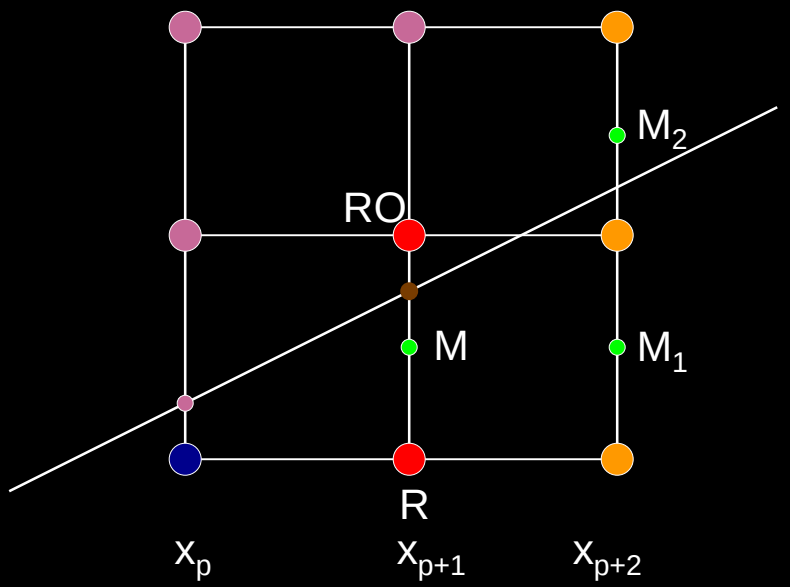


- Definiere "Entscheidungsvariable" *d*:

$$d = F(M) = F(x_p + 1, y_p + \tfrac{1}{2})$$

- Für den Midpoint-Algo, betrachte das Vorzeichen von *d*:
  - Wenn *d* > 0, färbe RO
  - Wenn *d* < 0, färbe R
- Was ist mit dem nächsten Schritt?
- Annahme: wir haben d = F(M)




M2
RO
M
M1
R
xp
xp+1
xp+2

1. Fall: R wurde ausgewählt $\longrightarrow$ nächstes M ist M_1

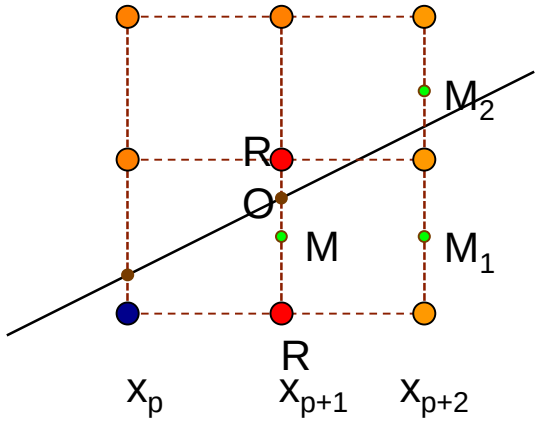
$$
\begin{aligned}
d_{\text{old}} &= F(M) \\
&= F\left(x_p + 1, y_p + \tfrac{1}{2}\right) \\
&= n_1(x_p + 1) + n_2\left(y_p + \tfrac{1}{2}\right) - c
\end{aligned}
$$

und

$$
\begin{aligned}
d_{\text{new}} &= F(M_1) \\
&= F\left(x_p + 2, y_p + \tfrac{1}{2}\right) \\
&= n_1(x_p + 2) + n_2\left(y_p + \tfrac{1}{2}\right) - c
\end{aligned}
$$

somit

$$d_{\text{new}} = d_{\text{old}} + n_1$$



2. Fall: RO wurde ausgewählt ⟶ nächstes M ist M_2

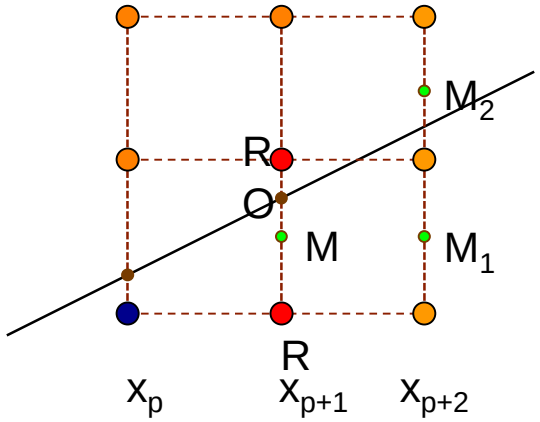
$$
\begin{aligned}
d_{\text{old}} &= F(M) \\
&= F\left(x_p + 1, y_p + \tfrac{1}{2}\right) \\
&= n_1(x_p + 1) + n_2\left(y_p + \tfrac{1}{2}\right) - c
\end{aligned}
$$

und

$$
\begin{aligned}
d_{\text{new}} &= F(M_2) \\
&= F\left(x_p + 2, y_p + \tfrac{3}{2}\right) \\
&= n_1(x_p + 2) + n_2\left(y_p + \tfrac{3}{2}\right) - c
\end{aligned}
$$

somit

$$
d_{\text{new}} = d_{\text{old}} + n_1 + n_2
$$



- Pseudo-Code des Midpoint-Algo:

```
berechne n1, n2, c
x, y ← x0, y0
d ← F(M) = F(x0 + 1, y0 + 1/2) = n1 + n2/2
setze d1 ← n1, d2 ← n1 + n2
while x ≤ x1:
    zeichne Pixel (x,y)
    x += 1
    if d > 0:
        y += 1
        d += d2
    else:
        d += d1
```

- Achtung: in obigem Pseudo-Code ist evtl. $d = \frac{k}{2}$
  - Lösung: ...

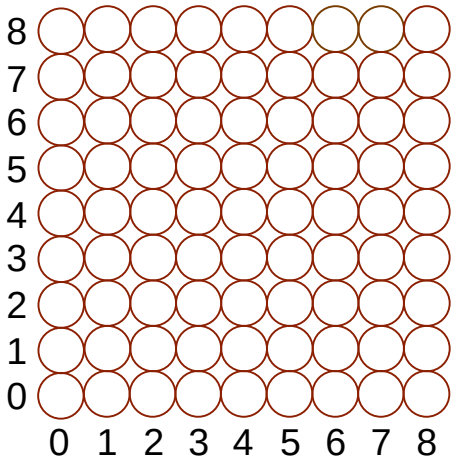
Beispiel

- Zeichne Linie von (1,2) nach (5,5)

```
x, y ← x0, y0
```

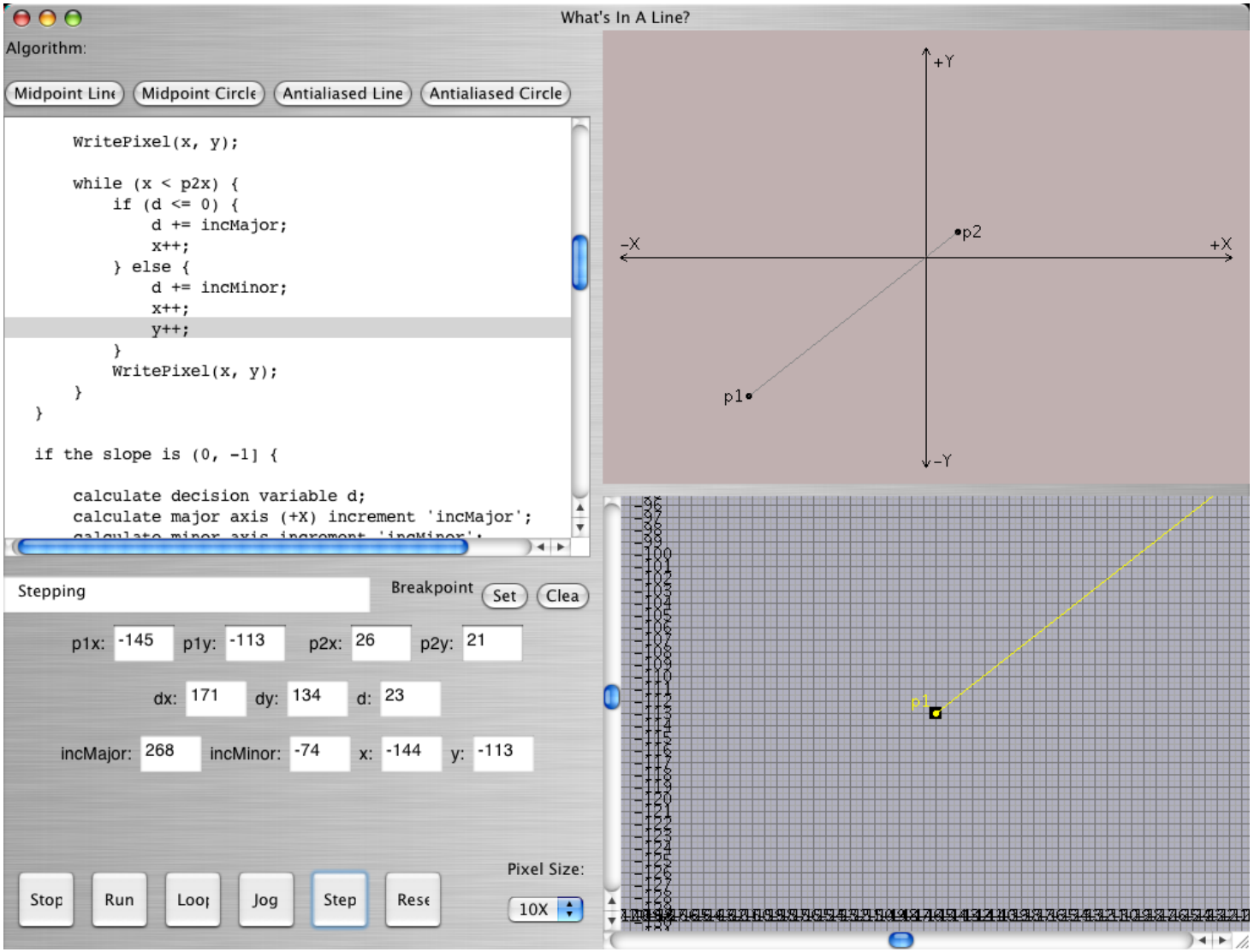
$$d \leftarrow F(M) = F(x_0 + 1, y_0 + \frac{1}{2}) = n_1 + \frac{n_2}{2}$$

```
setze d1 ← n1, d2 ← n1 + n2
while x ≤ x1:
    zeichne Pixel (x,y)
    x += 1
    if d > 0:
        y += 1
        d += d2
    else:
        d += d1
```



n_1	n_2	d_1	d_2	d	x	y

Demo



http://www.cs.rit.edu/~ncs/whatsInALine/whatsInALine.html

Bemerkungen

- Diese Art von Algorithmen zur Rasterisierung (Diskretisierung) von geometrischen Objekten ist auch bekannt als DDA (digital differential analyzer)

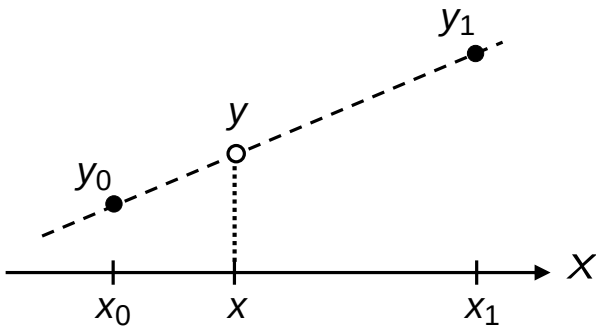
MADDIDA (Magnetic Drum Digital Differential Analyzer, Northrop Aircraft) 1952

- Verwendet die algorithmische Technik: inkrementelle Berechnung (inkrememteller Algorithmus)

Interpolation von Attributen

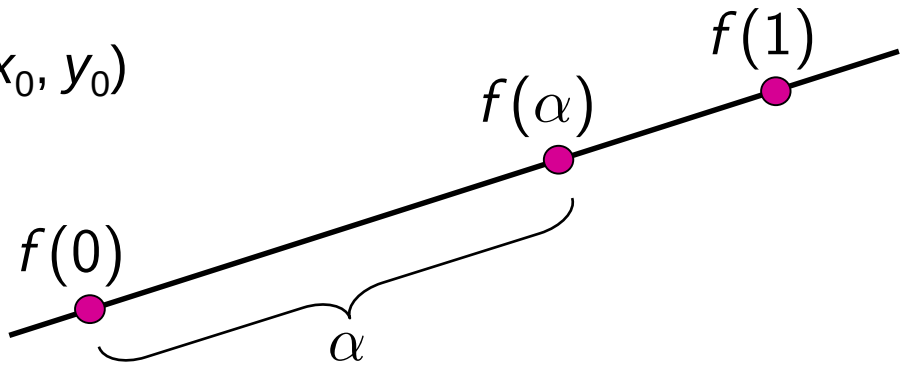
- Häufig haben Eckpunkte weitere Attribute (außer der Pos.)
  - Z.B. verschiedene Farben
- Ziel: ein gleichmäßiger Farbverlauf entlang der Linie
- Idee: lineare Interpolation
- Im 1D: $y = f(x) = (1 - \alpha)y_0 + \alpha y_1$

  mit $\alpha = (x - x_0)/(x_1 - x_0)$



- Im 2D ist α gerade die normierte(!)

  Distanz zwischen (x, y) und (x_0, y_0)

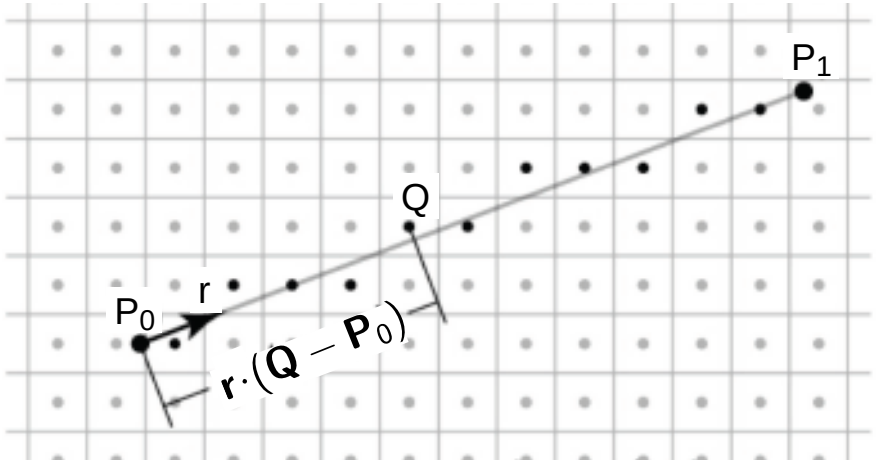


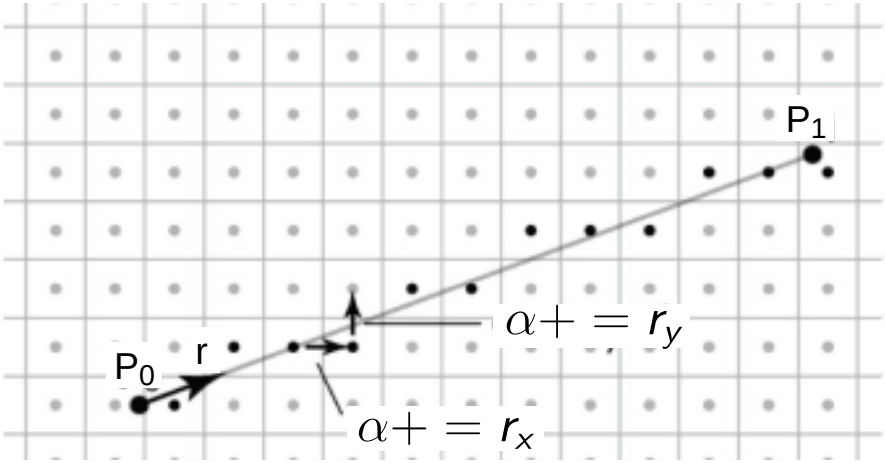
- Problem: Pixel Q liegen i.A. *nicht* genau auf der Linie
- Definiere 2D Funktion zur Projektion auf die Linie:

$$\mathbf{r} = \frac{\mathbf{P}_1 - \mathbf{P}_0}{\|\mathbf{P}_1 - \mathbf{P}_0\|}$$

$$\alpha = \mathbf{r} \cdot (\mathbf{Q} - \mathbf{P}_0)$$

$$f(\alpha) = (1-\alpha)\begin{pmatrix} r_0 \\ g_0 \\ b_0 \end{pmatrix} + \alpha \begin{pmatrix} r_1 \\ g_1 \\ b_1 \end{pmatrix}$$

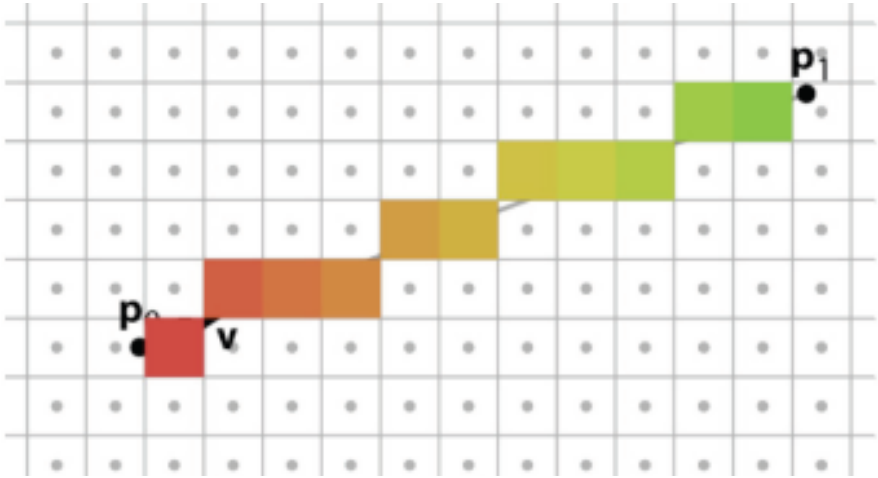




- Beobachtung: *f* ist *linear* in Q_x und Q_y

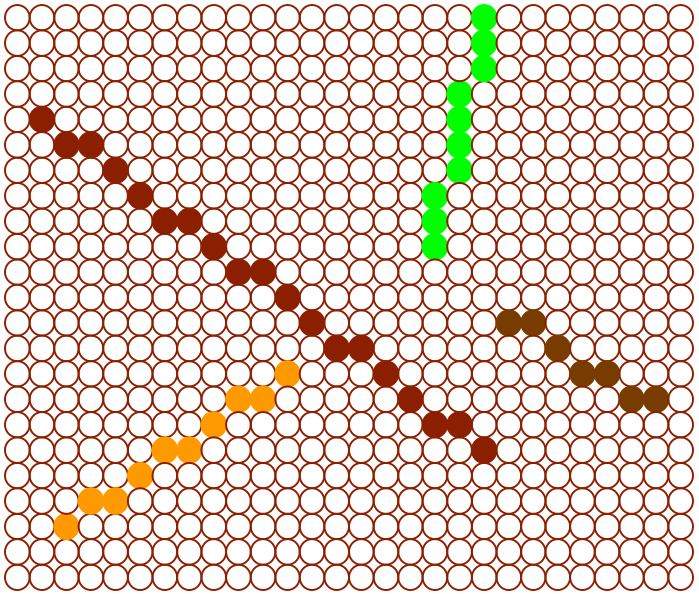
➢ Verwende DDA zur inkrementellen Berechnung von *f*

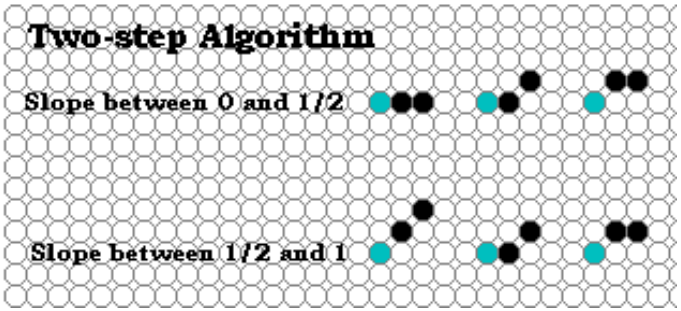
- Resultat:



Geschwindigkeitssteigerung

- Sind rasterisierte Linien symmetrisch?
- Abhängig von der Länge:
  - Gerade # an Pixel → ja
  - Ungerade # an Pixel →
    ja, bis auf 1 Pixel in der Mitte
- Idee: zeichne von beiden Seiten
  [Rokne et al., 1990]
- Man kann 2 Pixel zeichnen mit:
  - 1 Vergleich
  - 1 Update der Entscheidungsvariable d
- Weiterhin: mit 1 Test kann man die nächsten 2 Pixel entscheiden
  [Wyvill et al., 1990]



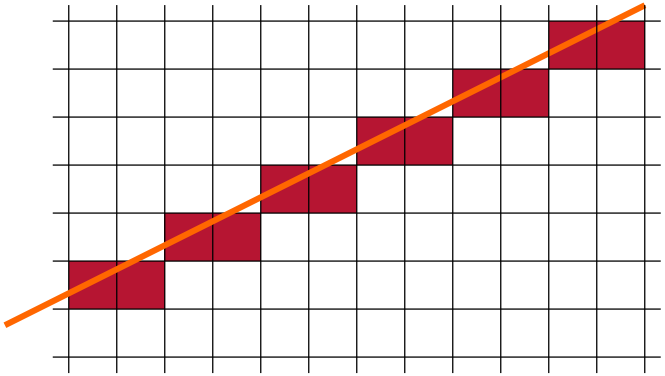


Span-wise Rendering: Das letzte(?) Quentchen

- Vereinfachungen (hier): betrachte (unendliche) Linien mit

$$y = mx\ , \quad 0 \leq m \leq 1$$

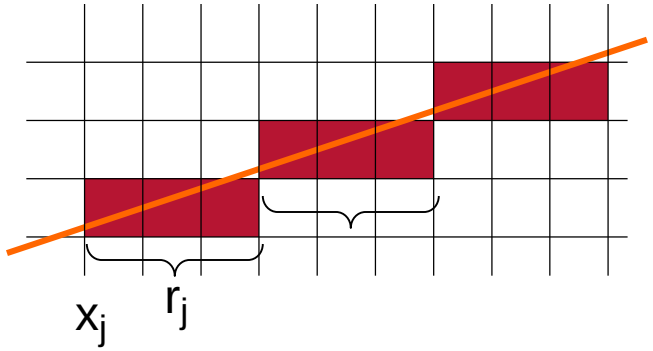
- Beobachtung: rote Zellen = Zellen, die an ihrer linken Kante von der Linie geschnitten werden



- Bezeichnungen:
  - Zelle wird identifiziert durch deren *linken unteren* Eckpunkt (x_j,y_j)
  - Span := Folge von Zellen mit gleicher y-Koord.
  - Länge des *j*-ten Spans = r_j

- Beobachtung: die diskrete Linie ist vollständig durch die Folge der Span-Längen definiert, denn

$$(x_{j+1}, y_{j+1}) = (x_j + r_j, y_j + 1)$$



- Satz (o. Bew.):

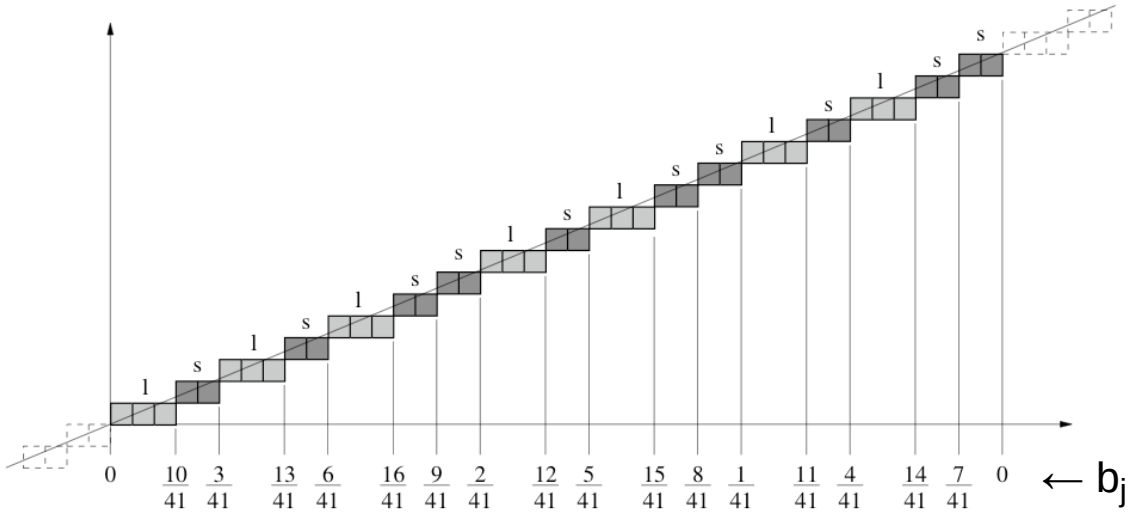
  Alle Spans der diskretisierten Linie haben nur *eine von höchstens zwei verschiedenen* Längen, nämlich

$$\forall j : \; r_j = r \;\vee\; r_j = r + 1$$

- Klar ist:

$$\tfrac{1}{2} \leq m \leq 1 \;\Rightarrow\; r = 1$$

- Beispiel:



- Beobachtung: wenn wir ein seeehr langes Segment der Linie betrachten, dann gilt

$$\frac{\#\ \text{Spans}}{\#\ \text{Zellen}} = \frac{\Delta y}{\Delta x} \approx m$$

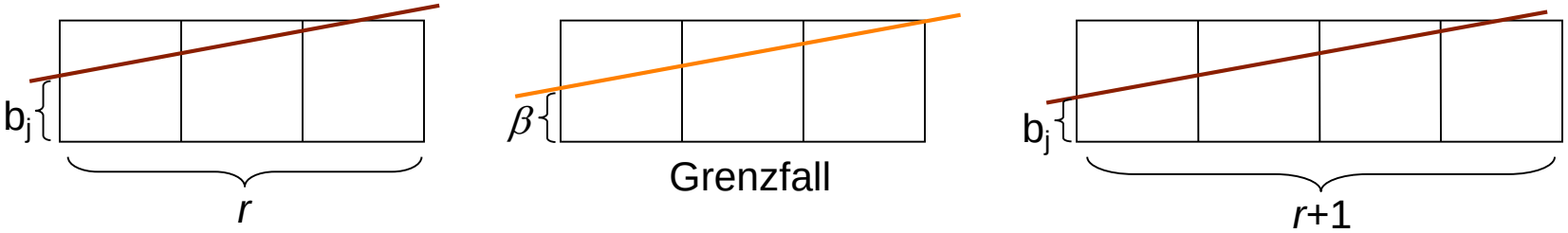
- Folge: aus der Steigung kann man die Span-Länge r (bzw. r+1) berechnen:

$$\frac{1}{m} = \text{mittlere Span-Länge} \in [r, r+1] \Rightarrow$$

$$r = \left\lfloor \frac{1}{m} \right\rfloor \ , \ r+1 = \left\lceil \frac{1}{m} \right\rceil$$

- Im Folgenden: Berechnung von r_j , m.a.W., Methode zur Entscheidung, ob man einen "langen Span" oder einen "kurzen Span" hat

- Wovon hängt es ab, ob man einen langen / kurzen Span hat?



- Fazit: falls $b_j \geq \beta$, dann kurzer Span, sonst langer Span
- Bestimmung von β:

$$b_j = mx_j - y_j \quad (1)$$

$$b_{j+1} - b_j = mr_j - 1 \quad (2)$$

Im Grenzfall ist $b_{j+1} = 0$ und $b_j = \beta$, also

$$\beta = 1 - mr = 1 - m \left\lfloor \frac{1}{m} \right\rfloor$$

- Das nächste b_{j+1} ist also:

  falls kurzer Span $\rightarrow$ $b_{j+1} = b_j - \beta$

  falls langer Span $\rightarrow$ $b_{j+1} = b_j + m - \beta$

- Damit hat man einen iterativen, sehr effizienten Algo zur Aufzählung aller Zellen, die von einer Linie getroffen werden
- Weiteres (lästiges) Detail:
  - Bei einem Strahl ist der erste Span i.A. gekürzt
  - Soll hier nicht weiter vertieft werden

Speedup gegenüber einfachem DDA

- Komplexität:

  O(*n*) bei DDA (z.B. Midpoint),

  O(*n/r*) mit der Span-basierten Methode,

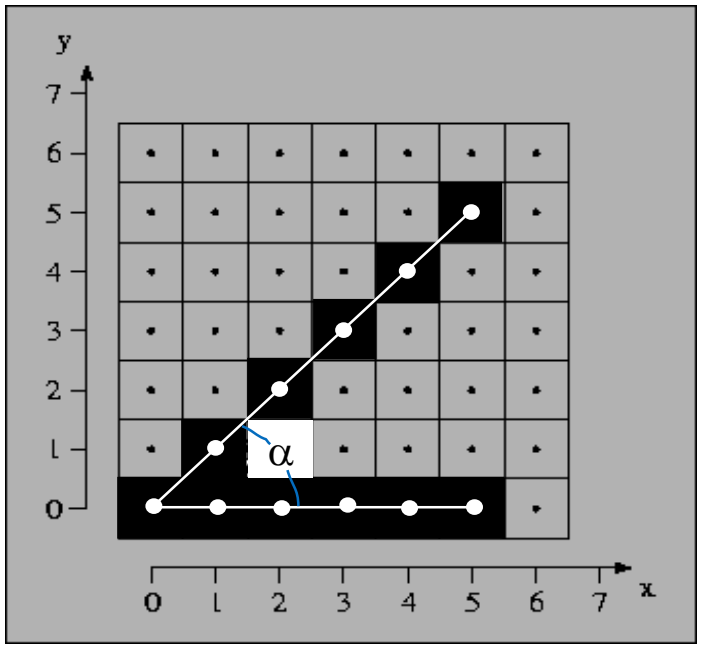
  n = Anzahl Zellen auf dem Strahl, *r* = mittlere Span-Länge

- In Zahlen:
  - Ca. Faktor 2 schneller über alle mögliche Orientierungen des Strahls

Weitere Überlegungen

- Gewünscht: einheitliche Stärke und Helligkeit
- Bei gleicher Pixelzahl sind schräge Linien länger als horizontale
- Ändere Intensität der Linie gemäß der Steigung
- Skaliere den Grauwert um den Faktor

$$\cos(45^\circ - \alpha)\,, \quad \alpha = 0^\circ \ldots 45^\circ$$



- Was ist bei gemusterten Linien? (gestrichelte Linie, etc.)

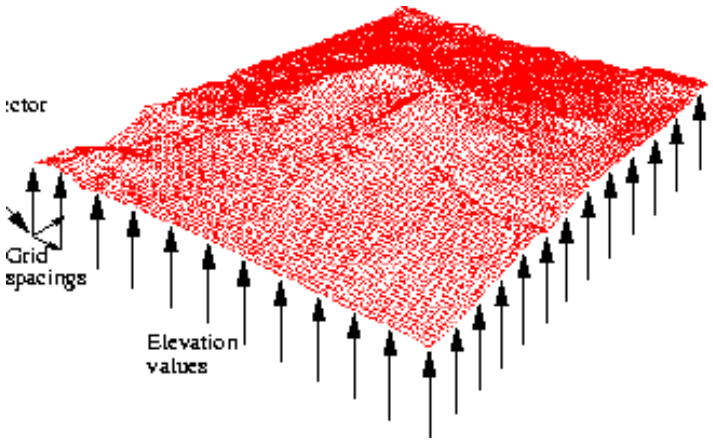
Anwendung der DDA-Technik: Ray-Tracing Height Fields

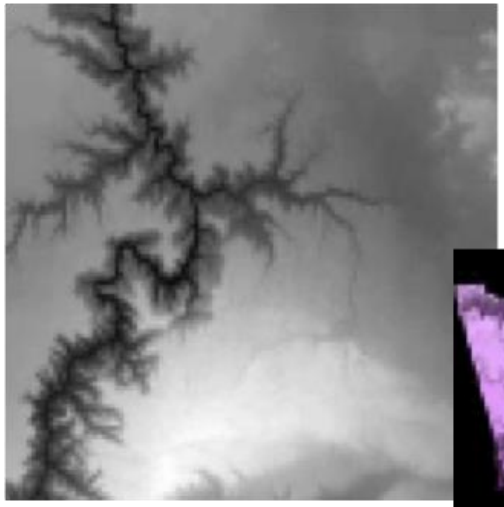
[Henning & Stephenson, 2004]

- Height Field = alle Arten von Flächen, die sich als Funktion

$$z = f(x, y)$$

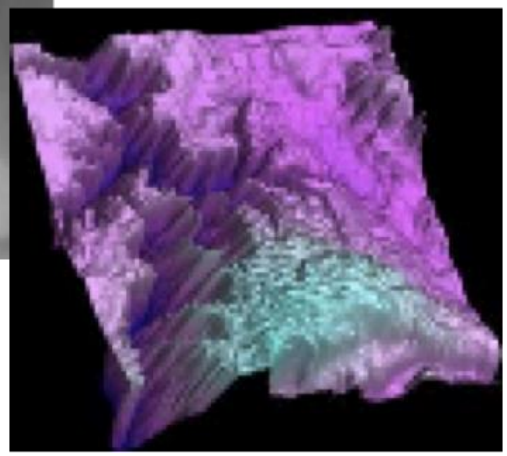
  schreiben lassen
  - Z.B.: Terrain, Meßwerte über einer Ebene, 2D-Skalarfeld, …





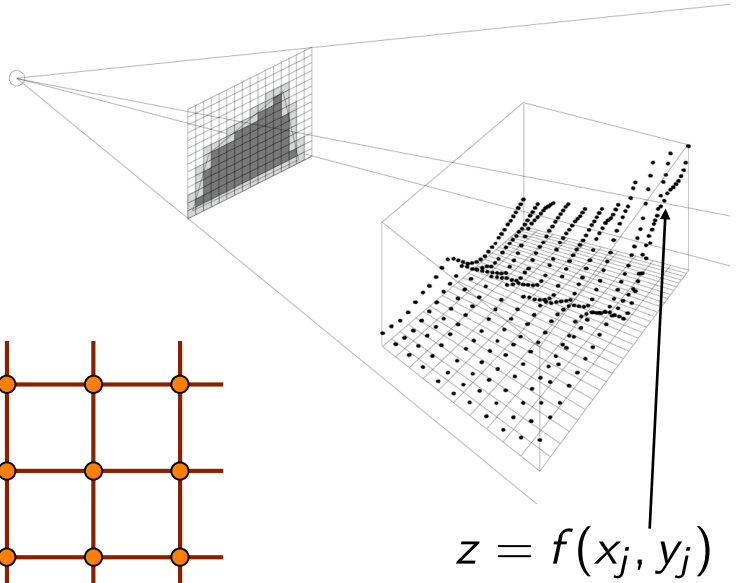
Height field
(= Bitmap)

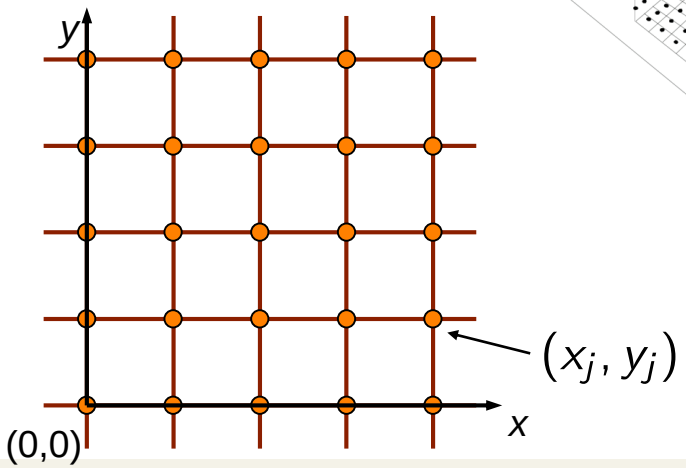
Rendered



Situation

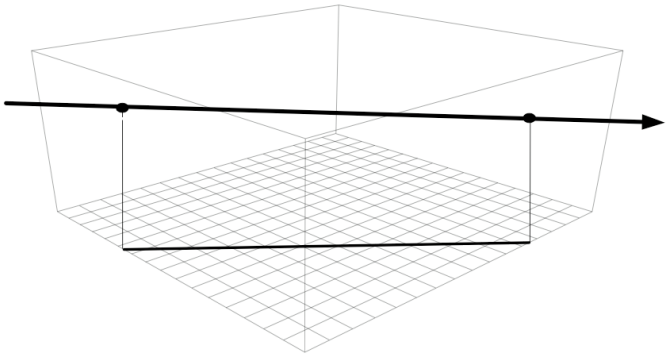
- Die naive Methode, ein Height-Field zu raytracen:
  - Konvertiere das n × n Feld in $2n^2$ Dreiecke, teste Strahl gegen jedes
  - Probleme: langsam, benötigt viel Speicher
- Ziel: direktes Ray-Tracing des Height-Fields aus dem 2D-Array
- Gegeben:
  - Strahl
  - Feld [0…n] × [0…n] als Float-Array
  - Höhenwerte liegen auf den Gitterknoten vor



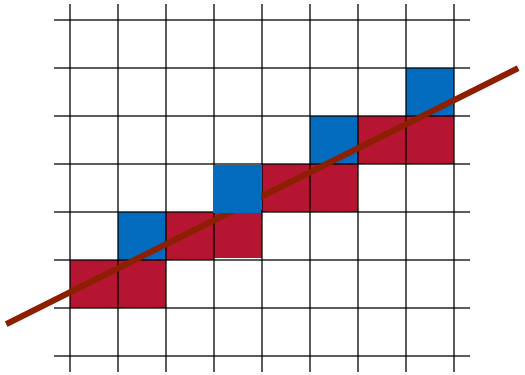


Das Verfahren

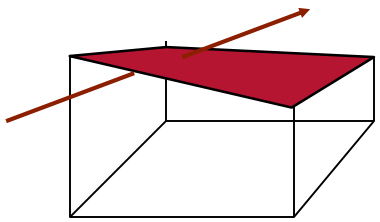
1. Dimensionsreduktion
   - Projiziere Strahl in xy-Ebene



2. Alle Zellen der Reihe nach besuchen, die vom Strahl geschnitten werden (und nur diese)
   - Ähnlich zu Scan-Conversion, aber mit zusätzlichen Zellen

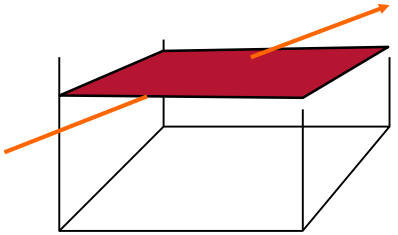


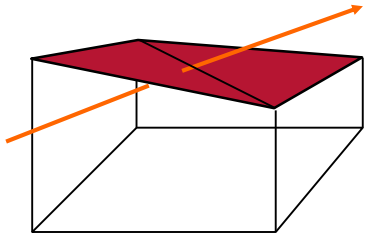
3. Strahl testen gegen das Flächenstück, das von den 4 Höhenwerten an den Ecken aufgespannt wird

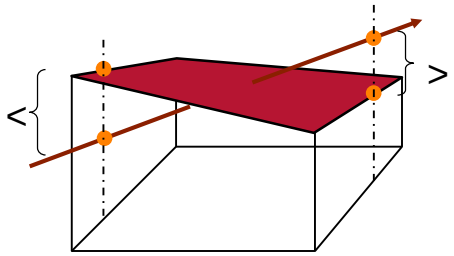


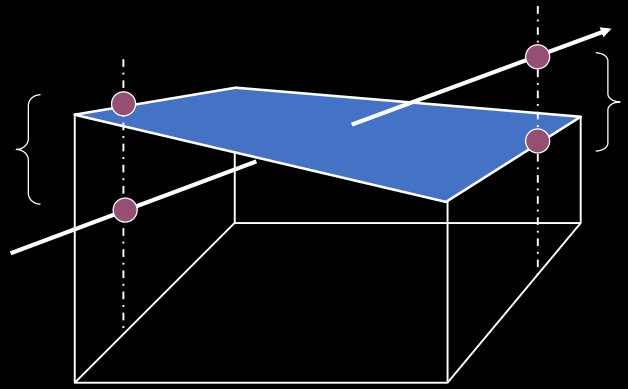
Schnittest Strahl—Flächenstück in der Zelle

- Naive Methoden:
  - "Nearest-Neighbor":
    - Bestimme mittlere Höhe aus den 4 Höhenwerten an den Ecken
    - Schneide Strahl gegen horizontales Quadrat mit dieser mittleren Höhe
    - Sehr ungenau
  - "2 Dreiecke":
    - Konstruiere 2 Dreiecke aus den 4 Punkten über den Ecken
    - Knick innerhalb der Zelle, Aufteilung in Dreiecke nicht eindeutig
- Besser: bilineare Interpolation
  - Betrachte Fläche als parabolisches Hyberboloid
  - Bestimme Höhe am Rand über/unter dem Strahl durch lineare Interpolation
  - Vergleiche Vorzeichen
  - Bestimmt ggf. Schnittpunkt & Normale



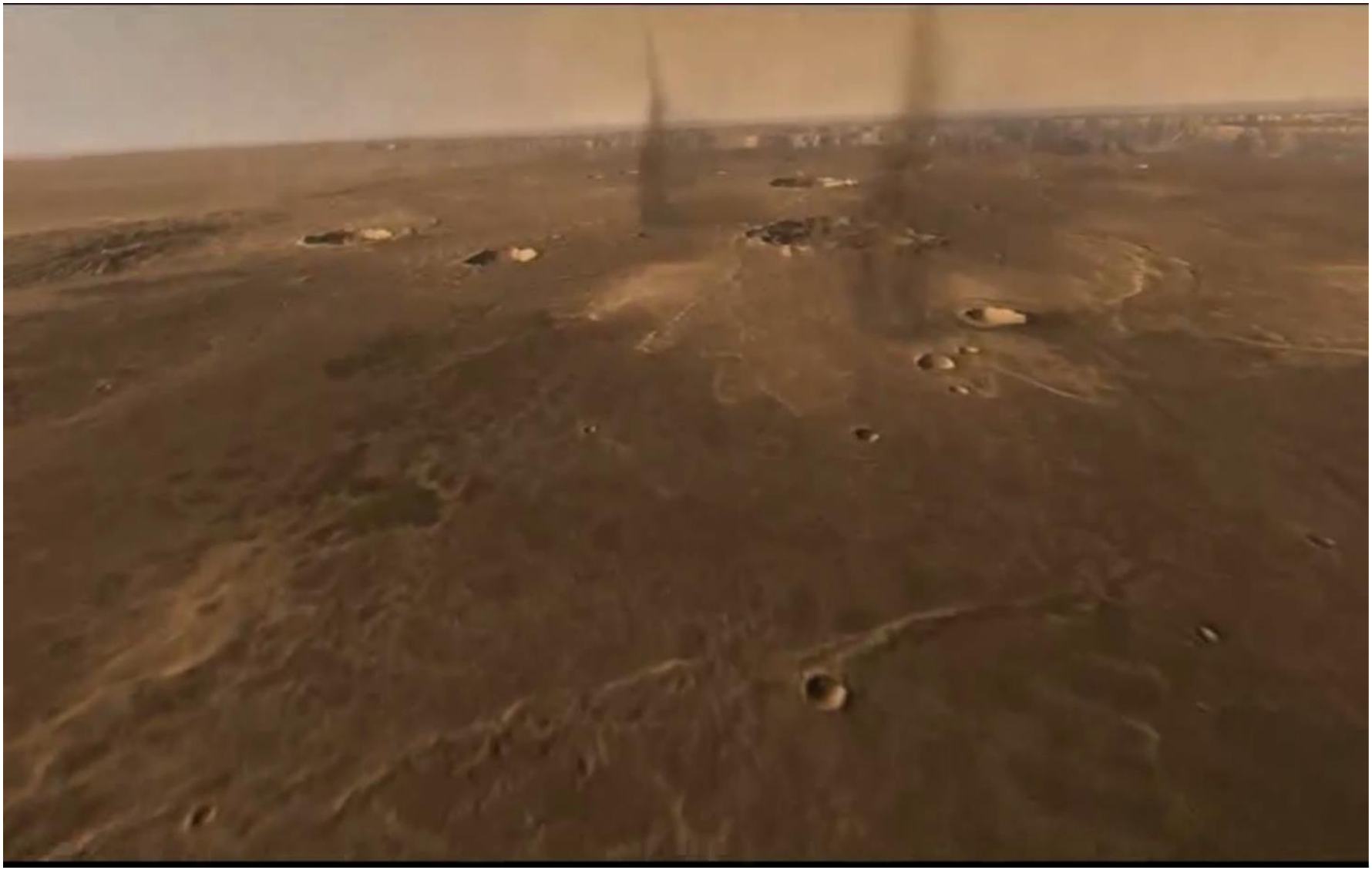






Das Prinzip "3 Punkte liegen immer in einer Ebene" in der Architektur

Aus der Sendung "Einstein" vom 25.10. 2012 des Schweizer Fernsehens SF

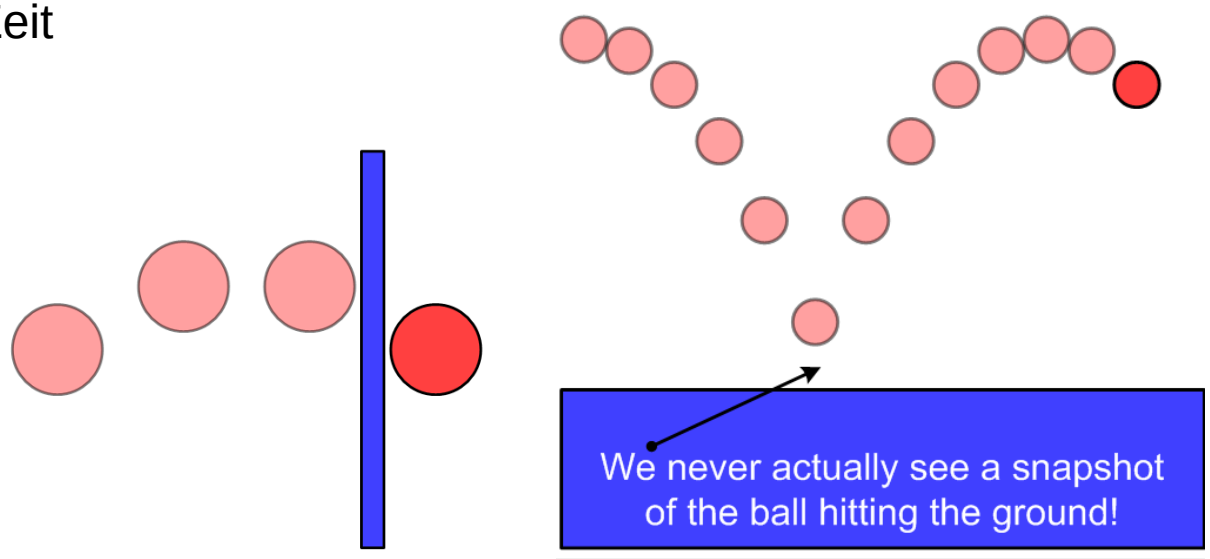


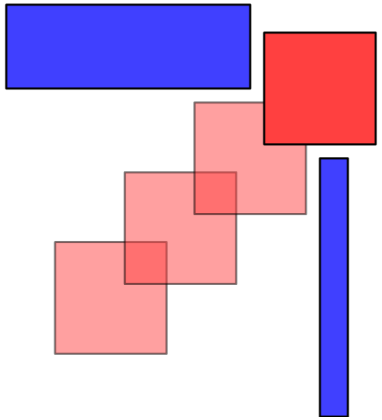
Valles Marineris, Mars - http://mars.jpl.nasa.gov

Anwendungsfall: Continuous Collision Detection

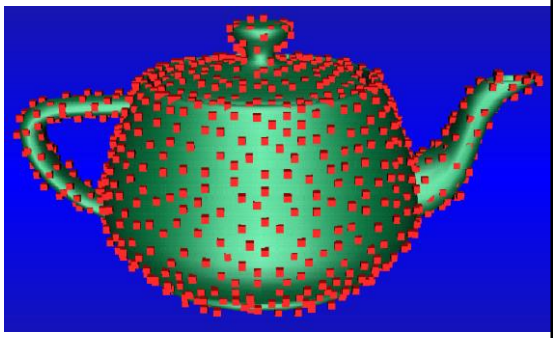
[Xu, Barbic 2014]

- Problemstellung:
  - Gegeben zwei Objekte A, B, bewegt durch eine Simulation
  - Annahme: zum Zeitpunkt t_1 sind A(t_1), B(t_1) kollisionsfrei
  - Bestimme, ob im Zeitintervall [t_1,t_2] eine Kollision vorliegt und, falls ja, den frühesten Zeitpunkt $t \in [t_1, t_2]$, zu dem sie sich gerade "berühren"
- Probleme (generell):
  - Diskretisierung der Zeit
  - Tunneling



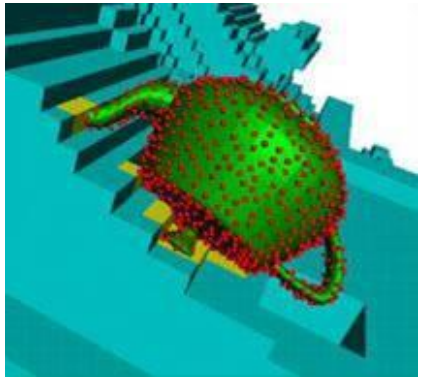


- Limits für min. Objekt-Größe, max. Geschwindigkeit und min. Framerate helfen nur bedingt
- Lösung für (diskrete) Coll.Det.:
  - Voxmap-Pointshell-Verfahren
  - Pointshell = Sampling der Oberfläche mit Points
  - Voxmap:
    - 3D Gitter für statische Szene
    - Einfachster Fall: 1 = innerhalb, 0 außerhalb
    - Besser: Distanzfeld = Gitterknoten speichern Distanz von Gitter-Punkt zu nähestem Punkt auf Oberfläche, positiv/negativ = außerhalb/innerhalb



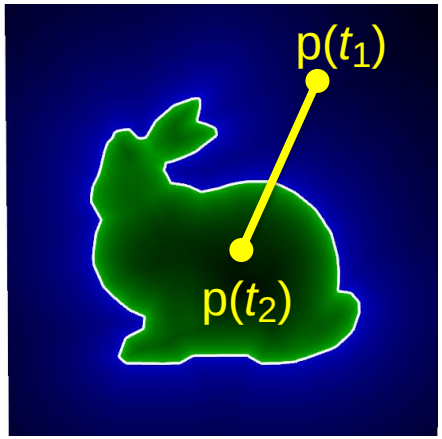
- Discrete collision detection:

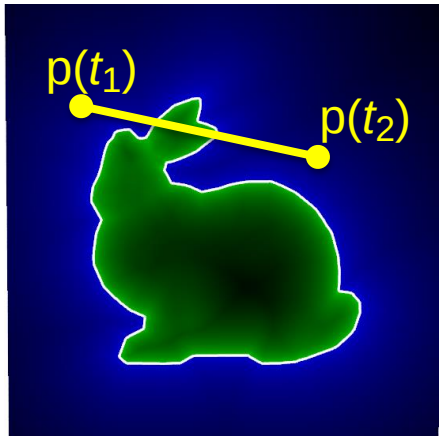
```
for all points p ∈ A:
  test voxel(p) ∈ B
```



- Continuous collision detection ⟶ test line segments

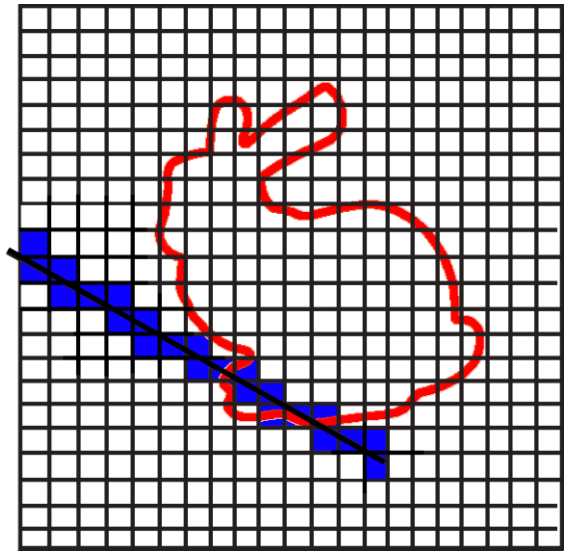
```
for all points p ∈ A:
  check whether line
  segment p(t1)-p(t2)
  goes from pos. to neg.
  distance somewhere
```





- Achtung: es genügt nicht, die Voxel p(t_1) und p(t_2) zu testen!

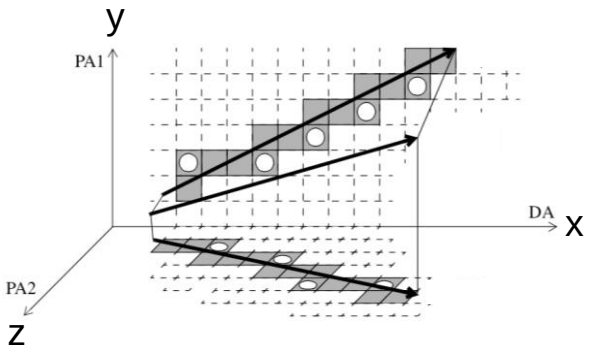
- Verfahren:
  1. Besuche alle Voxel, die vom Liniensegment getroffen werden
  2. In jedem Voxel: teste auf 0-Durchgang



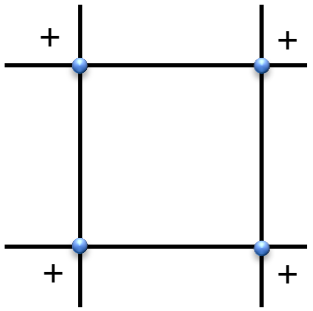
- Zu 1:
  - Einfacher 3D-DDA-Algorithmus
  - O.B.d.A. ist X-Achse = unabhängige Variable ("treibende Achse")
  - Y und Z sind abhängige Achsen
  - Zerlege Liniensegment in 2 Geradengleichungen

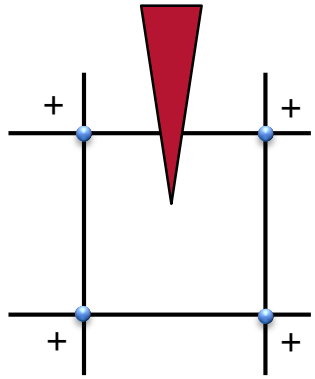
$$y = m_1 x + b_1 \quad , \quad z = m_2 x + b_2$$

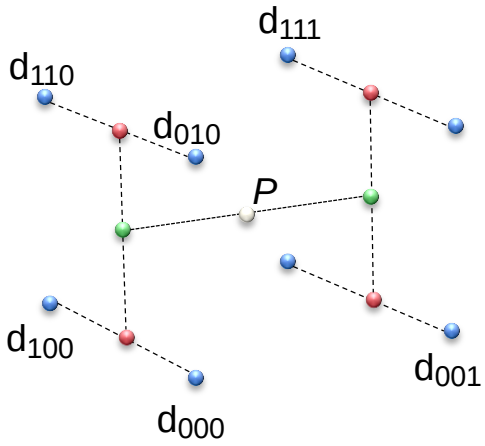
  - Führe zwei Entscheidungsvariablen d_1 und d_2



- Zu 2:
  - Einfaches Ausschlusskriterium:
    alle Voxel-Ecken sind positiv,
    oder alle Ecken negativ
    - Verpasst Details – die aber im Distanzfeld schon verloren gegangen sind
  - Berechne interpolierten Distanzwert für beliebigen Punkt *P* innerhalb eines Voxels durch trilineare Interpolation
    - OBdA: Voxel = Einheitswürfel $[0,1]^3$
    - Distanzwerte an den Ecken = d_{abc} , a,b,c∈{0,1}
    - Gesucht: d_{xyz} = Distanz am Punkt $P = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$







- Trilineare Interpolation:

$$d_{xbc} = (1-x)\cdot d_{0bc} + x\cdot d_{1bc} \quad , b=0,1,\ c=0,1 \quad \lfloor 4x$$

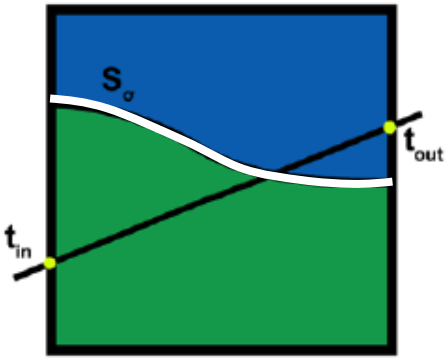
$$d_{xyc} = (1-y)\cdot d_{x0c} + y\cdot d_{x1c} \quad , c=0,1 \quad \lfloor 2x$$

$$d_{xyz} = (1-z)\cdot d_{xy0} + z\cdot d_{xy1} \quad \lfloor 1x$$

- Zweites Ausschlusskriterium: check

$$\text{sign}(\, P(t_{\text{in}})\,) \neq \text{sign}(\, P(t_{\text{out}})\,)$$

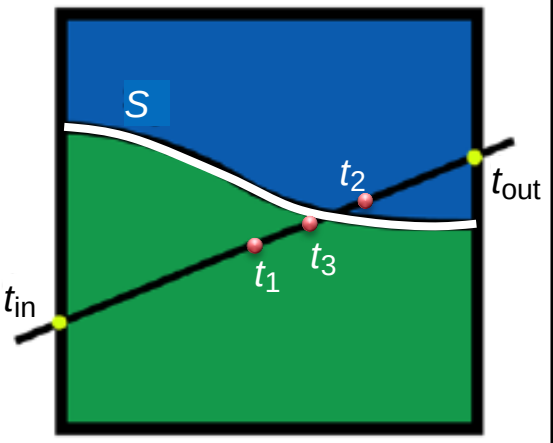
  - Verpasst weitere "ungünstige" Fälle



- Falls beide Vortests passiert ⟶ Null-Stellensuche: gesucht wird t mit

$$d(\,P(t)\,) = 0$$

- Bemerkung: $d(\,P(t)\,)$ ist ein Polynom vom Grad 3
  - Löse mit analytischer Formel
  - Oder suche Nullstelle mit Intervall-Halbierung



- Bemerkung: wir haben hier eine Fläche S "implizit" definiert

$$S = \{X \mid F(X) = 0\}$$

  - Diese heißen oft implizite Flächen, oder Iso-Surfaces

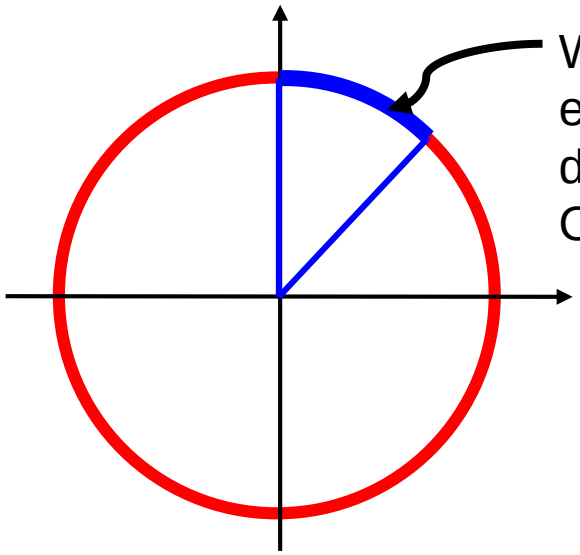
Scan-Konvertierung von Kreisen

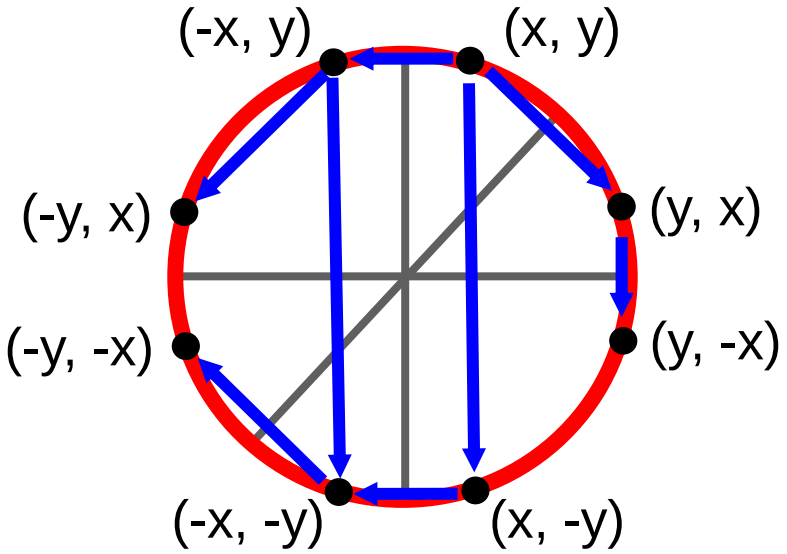
Nutze 8-Punkt-Symmetrie aus

- Berechne nur 1/8 eines Kreises mit $0 \leq x \leq \frac{r}{\sqrt{2}}$

```
drawCirclePoint(x,y):
    drawPixel(x,y)
    drawPixel(y,x)
    drawPixel(y,-x)
    :
    :
```

- Außerdem: oBdA ist Mittelpunkt = Ursprung





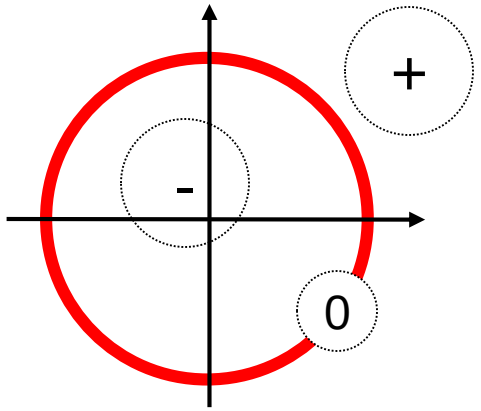
Implizite Kreisgleichung als geometrisches Prädikat

- OBdA: Mittelpunkt = Ursprung
- Definiere $F(x,y) = x^2 + y^2 - r^2$

  Für (*x*,*y*) auf dem Kreis: F(*x*,*y*) = 0

  falls F(*x*,*y*) > 0 $\Rightarrow$ (*x*,*y*) außerhalb

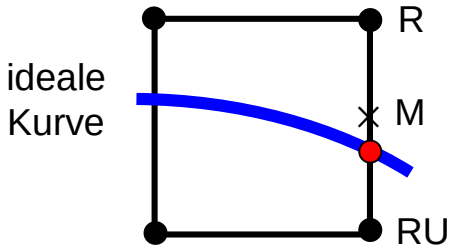
  und F(*x*,*y*) < 0 $\Rightarrow$ (*x*,*y*) innerhalb

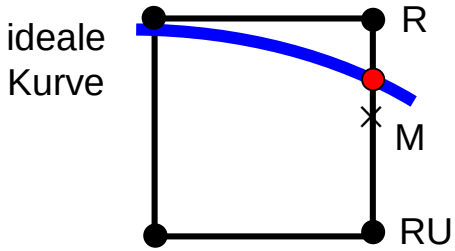


- In jedem x-Schritt: wähle R oder RU

  also: *F*(M) $\geq$ 0 $\Rightarrow$ RU

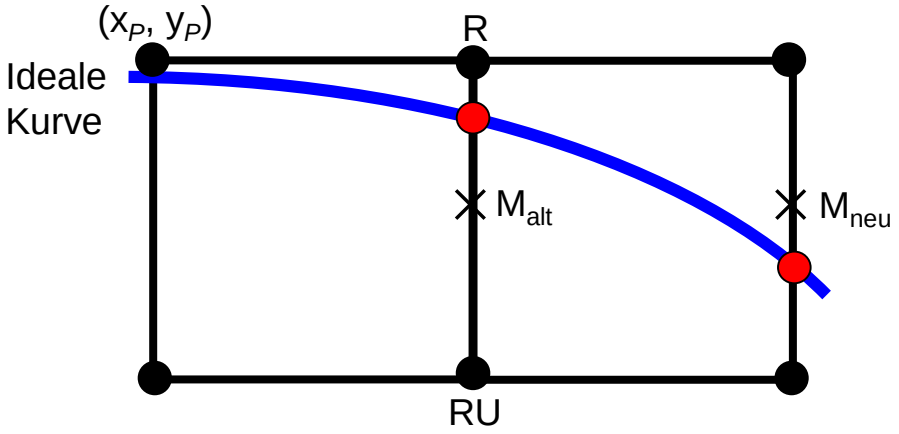
  und: *F*(M) < 0 $\Rightarrow$ R





- Definiere wieder eine Entscheidungsvariable $d = F(M)$

1. Fall: $d_{alt} < 0 \rightarrow$ R



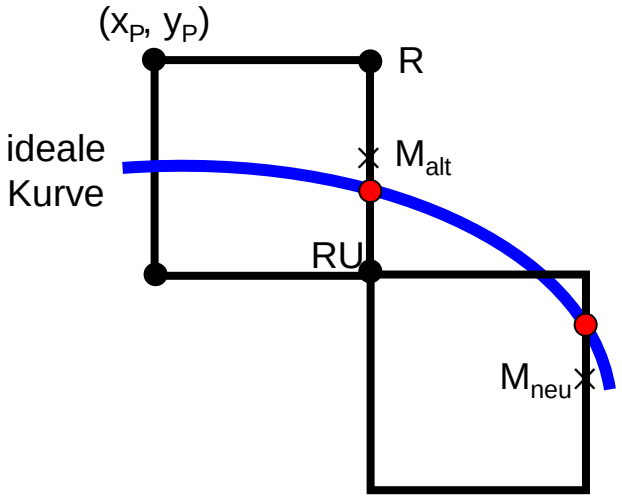
$$d_{alt} = F(x_P + 1, y_P - \tfrac{1}{2}) = (x_P + 1)^2 + (y_P - \tfrac{1}{2})^2 - r^2$$

$$d_{neu} = F(x_P + 2, y_P - \tfrac{1}{2}) = (x_P + 2)^2 + (y_P - \tfrac{1}{2})^2 - r^2$$

$$d_{neu} = d_{alt} + (2x_P + 3)$$

$$d_{\text{neu}} = d_{\text{alt}} + \Delta_R, \quad \text{mit } \Delta_R = 2x_P + 3$$

2. Fall: $d_{alt} \geq 0 \rightarrow$ RU



$$d_{neu} = F(x_P + 2, y_P - \tfrac{3}{2}) = (x_P + 2)^2 + (y_P - \tfrac{3}{2})^2 - r^2$$

$$d_{neu} = d_{alt} + (2x_P - 2y_P + 5)$$

$$d_{\text{neu}} = d_{\text{alt}} + \Delta_{RU}, \quad \text{mit } \Delta_{RU} = 2x_P - 2y_P + 5$$

- Kleines Problem: Δ_{RU} und Δ_R hängen von x_P und y_P ab!
- Idee: bilde Differenzen 2-ter Ordnung
- Aktualisiere in beiden Fällen jeweils Δ_{RU} und Δ_R :

Fall R	Fall RU
$\Delta_R(x,y) = 2x+3$	$\Delta_R(x,y) = 2x+3$
$\Delta_R(x+1,y) = 2(x+1)+3$	$\Delta_R(x+1,y-1) = 2(x+1)+3$
$= \Delta_R(x,y)+2$	$= \Delta_R(x,y)+2$
$\Delta_{RU}(x,y) = 2x-2y+5$	$\Delta_{RU}(x,y) = 2x-2y+5$
$\Delta_{RU}(x+1,y) = 2(x+1)-2y+5$	$\Delta_{RU}(x+1,y-1) = 2(x+1)-2(y-1)+5$
$= \Delta_{RU}(x,y)+2$	$= \Delta_{RU}(x,y)+4$

- Weiteres kleines Problem:
  - Durch Startbedingung ist d (zunächst) kein Integer:
  - Sei *r* eine Ganzzahl. Starte bei (0, r)
  - Nächster Mittelpunkt *M* liegt bei (1, r – ½)
  - Somit: $F(1, r - 1/2) = 1 + (r^2 - r - 1/4) - r^2$
    $= 5/4 - r$
- Beobachtung: d kann nur Werte aus …, -3/4, 1/4, 5/4, … annehmen
- Definiere neue Entscheidungsvariable $d' := d - \frac{1}{4}$
- Es gilt: $d' < 0 \Leftrightarrow d < 0$
- Rechne also nur mit d'

Midpoint-Algorithmus für Kreise

```
x ← 0, y ← r,
d ← 1-r
ΔR ← 3
ΔRU ← -2r + 5
while y > x:
    drawCirclePixel(x,y)
    x += 1
    if d < 0:
        d += ΔR
        ΔRU += 2
    else:
        d += ΔRU
        ΔRU += 4
        y -= 1
    ΔR += 2
```

Nachbemerkung

- Verallgemeinerung: analog kann man für Polynome beliebigen Grades ein solches inkrementelles Schema angeben
  - Stichworte: "Vorwärts-Differenzen", pyramid algorithms