Computer-Graphik I
Baryzentrische Koordinaten

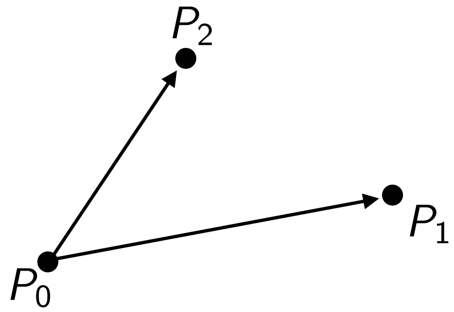
G. Zachmann
University of Bremen, Germany
cgvr.informatik.uni-bremen.de

- Def.: affin unabhängig

  Geg.: k+1 Punkte $P_i \in \mathbb{R}^n,\ 0 \leq i \leq k$. Seien dadurch k Vektoren v_i definiert: $v_i := P_i - P_0\ ,\quad i = 1, \ldots, k$

  Die Punkte P_i heißen affin unabhängig $\Leftrightarrow$ die Vektoren v_i linear unabhängig sind.

- Beispiel:



- Lemma:
  Falls die k+1 Punkte $P_i \in \mathbb{R}^n$ affin unabhängig sind $\Rightarrow k \leq n$.

- M.a.W.:
  es kann nie mehr als n+1 affin unabhängige Punkte geben.

- Def.: affines Koordinatensystem

  Wenn $k+1$ Punkte $P_0, \ldots, P_k \in \mathbb{R}^n$ affin unabhängig sind, so definieren sie ein affines Koordinatensystem.

- Def.: affine Kombination, baryzentrische Koordinaten

  Seien $k+1$ affin unabhängige Punkte $P_0, \ldots P_k \in \mathbb{R}^n$ gegeben. Daraus kann man weitere Punkte definieren mittels einer affinen Kombination:

$$P = \sum_{i=0}^{k} \lambda_i P_i, \qquad \text{mit} \quad \sum_{i=0}^{k} \lambda_i = 1, \; \lambda_i \in \mathbb{R}$$

  Die λ_i heißen baryzentrische Koordinaten von P bzgl. des Koordinatensystems $[P_0, P_1, \ldots, P_k]$.

Eindeutigkeit der baryzentrischen Koordinaten

- Satz (o. Bew.):

  Die Punkte $P_0, \ldots P_k \in \mathbb{R}^n,\ k \leq n$ sind affin unabhängig $\Leftrightarrow$ jede affine Kombination bzgl. dieser Punkte ist eindeutig, d.h.

$$\forall s_i, t_i \in \mathbb{R} \text{ mit } \sum s_i = \sum t_i = 1 :$$

$$\sum s_i P_i = \sum t_i P_i \;\Leftrightarrow\; \forall i = 0, \ldots, k : \; s_i = t_i$$

Affine Abbildungen

- Affine Abbildung := Abbildung, die affine Kombinationen invariant lassen, d.h.

$$P = \sum \lambda_i P_i \;\Leftrightarrow\; \phi(P) = \phi\left(\sum \lambda_i P_i\right) = \sum \lambda_i \, \phi(P)$$

- M.a.W.:
  eine affine Abbildung ist eindeutig durch die Bilder der affinen Basis festgelegt.
- Affine Abbildungen "="
  {lineare Abbildungen} + {Translationen}
  (o. Bew.)

Kleiner Exkurs: die konvexe Hülle

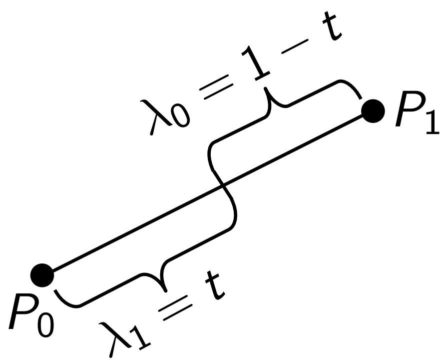
- Definition: konvexe Hülle

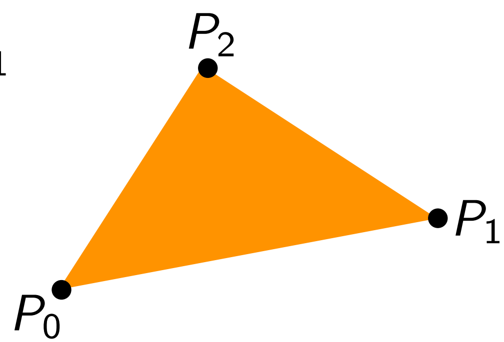
  Seien $P_0, \ldots, P_k$ Punkte (*nicht* notw.weise affin unabhängige Pkte).
  Dann ist die konvexe Hülle dieser Punkte definiert als:

$$\mathrm{CH}(P_0, \ldots, P_k) := \left\{ P \mid P = \sum \lambda_i P_i,\ \sum \lambda_i = 1,\ \forall i : \lambda_i \geq 0 \right\}$$

  In diesem Fall gilt $\forall i :\ 0 \leq \lambda_i \leq 1$.
  Eine solche Summe heißt auch konvexe Kombination.

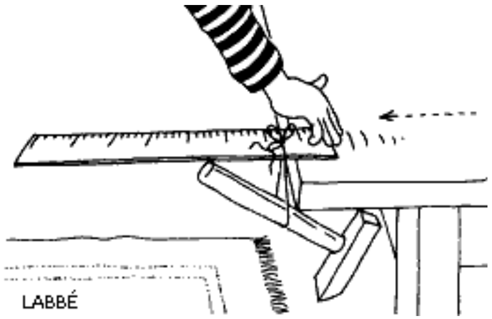
- Beispiele:
  - $P_0, P_1 \longrightarrow$ Strecke
  - $P_0, P_1, P_2 \longrightarrow$ Dreieck





Physikalische Interpretation

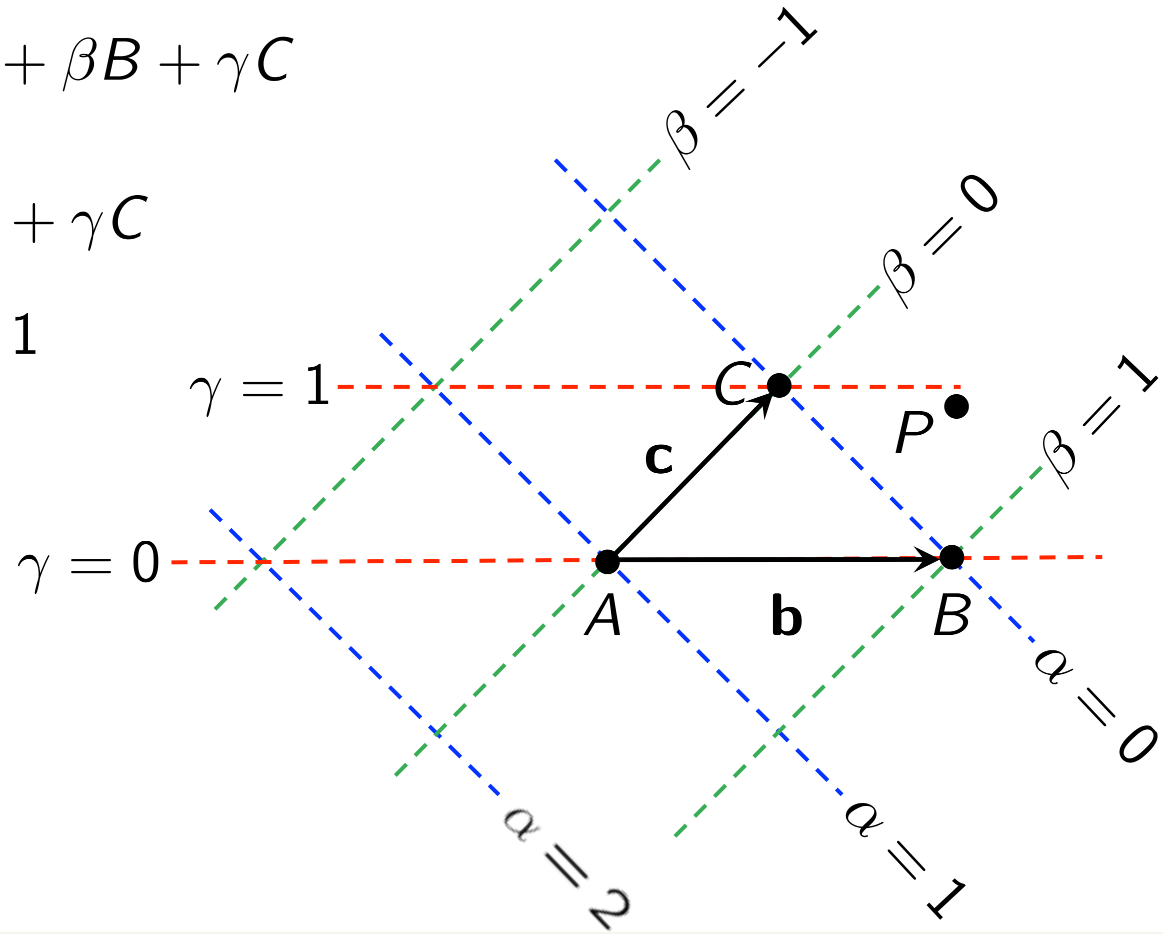
- Gegeben $k+1$ Punkte $P_0, \ldots, P_k \in \mathbb{R}^n$
  mit den Massen m_i , $\sum m_i \neq 0$
- Definiere die „normierten Massen“ $\lambda_i = \dfrac{m_i}{\sum m_i}$
- Dann ist der Punkt $P = \sum \lambda_i P_i$
  genau der Schwerpunkt der $k+1$ Punkte



Beispiel: Dreieck im $\mathbb{R}^n$

$$
\begin{aligned}
P &= A + \beta\mathbf{b} + \gamma\mathbf{c} \\
&= A + \beta(B-A) + \gamma(C-A) \\
&= \underbrace{(1-\beta-\gamma)}\,A + \beta B + \gamma C \\
&= \qquad \alpha A + \beta B + \gamma C
\end{aligned}
$$

$\text{mit } \alpha + \beta + \gamma = 1$



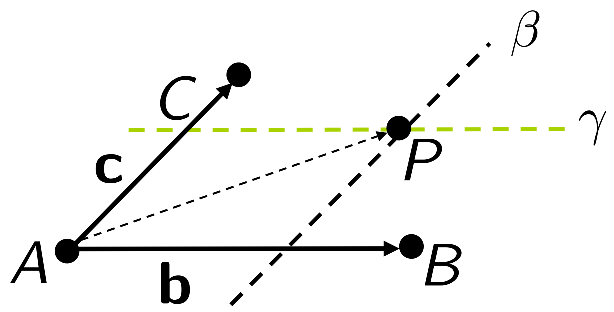
Häufige Aufgabe

- Bestimme die baryzentrischen Koordinaten eines Punktes P bzgl. des Dreiecks A, B, C

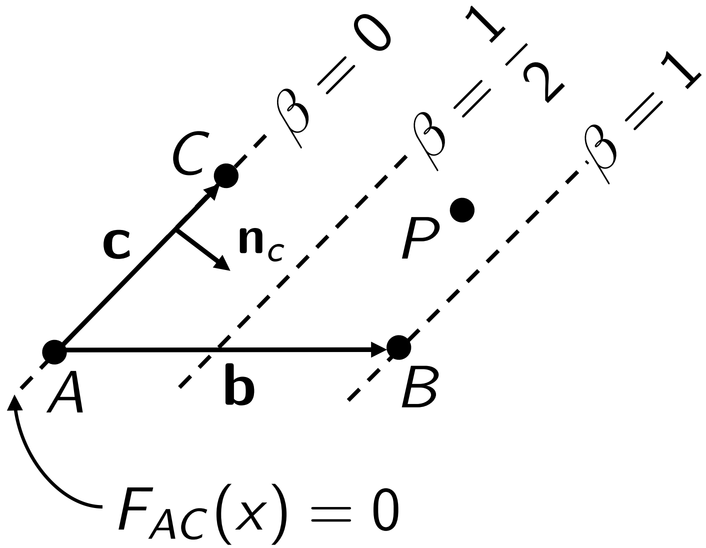
- Lösung 1:
  - $\beta(B-A)+\gamma(C-A) \stackrel{!}{=} P-A = q$
  - Löse das LGS

$$\begin{pmatrix} b_x & c_x \\ b_y & c_y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \beta \\ \gamma \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} q_x \\ q_y \end{pmatrix}$$

  - Setze $\alpha = 1 - \beta - \gamma$



- Lösung 2:
  - Verwende Beobachtung: alle Punkte P mit dem selben Abstand von der Geraden $\overline{AC}$ haben dieselbe baryzentrische Koordinate
  - Setze $n_c := \begin{pmatrix} c_y \\ -c_x \end{pmatrix}$



$$F_{AC}(P) := \frac{n_c \cdot (P - A)}{n_c \cdot (B - A)}$$

Normierung

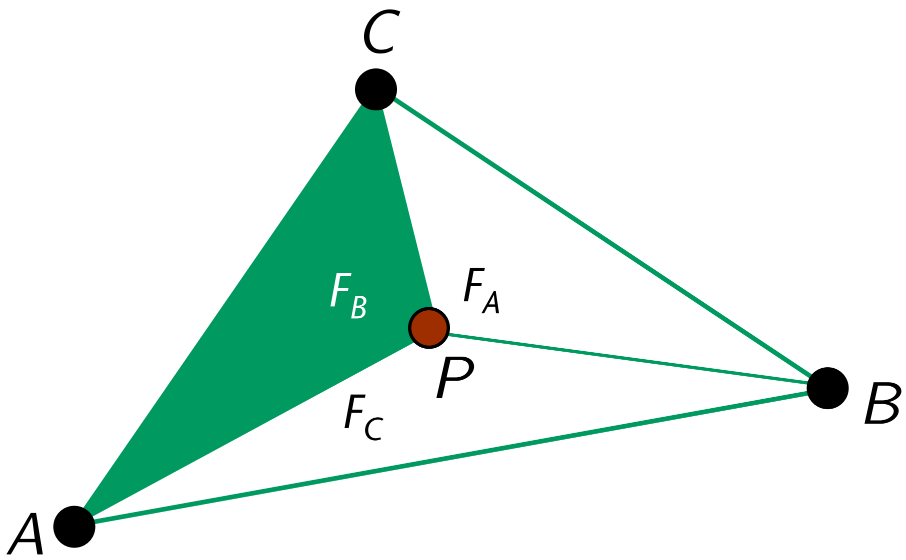
  - Damit ist $F_{AC}(A) = F_{AC}(C) = 0,$

    $F_{AC}(B) = 1$ (wegen Normierung)
  - Definiere analog F_{AB} und F_{BC}
  - Damit ist $\alpha = F_{BC}(P), \beta = F_{AC}(P), \gamma = F_{AB}(P)$

- Lösung 3:
  - Nutze den geometrischen Zusammenhang zwischen Flächeninhalten und baryzentrische Koordinaten:

$$\alpha = \frac{F_A}{F} \quad \beta = \frac{F_B}{F} \quad \gamma = \frac{F_C}{F}$$

$$F = F_A + F_B + F_C$$



Erinnerung

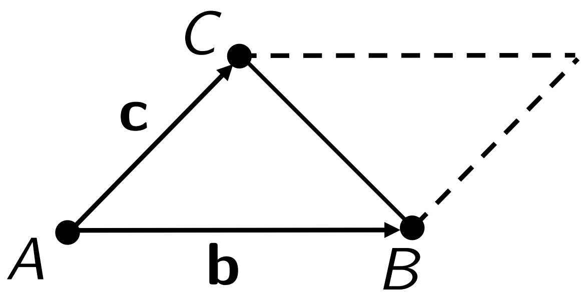
- Flächeninhalt eines Dreiecks A, B, C

$$\mathcal{F}(\Delta ABC) = \frac{1}{2} \| \mathbf{b} \times \mathbf{c} \|$$

$$= \frac{1}{2} \| (B - A) \times (C - A) \|$$

$$= \frac{1}{2} \begin{vmatrix} B_x - A_x & C_x - A_x \\ B_y - A_y & C_y - A_y \end{vmatrix}$$

$$= \frac{1}{2} \begin{vmatrix} A_x & B_x & C_x \\ A_y & B_y & C_y \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

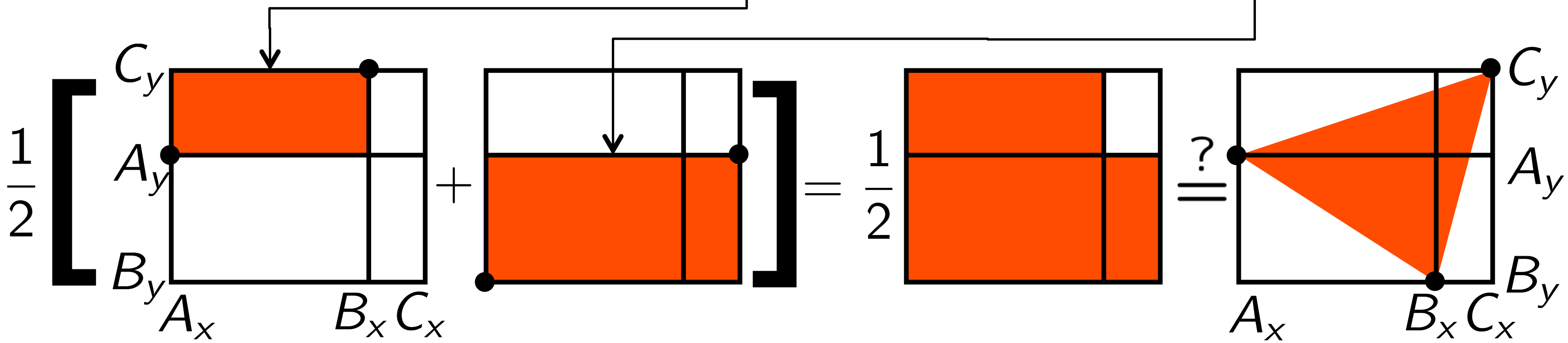


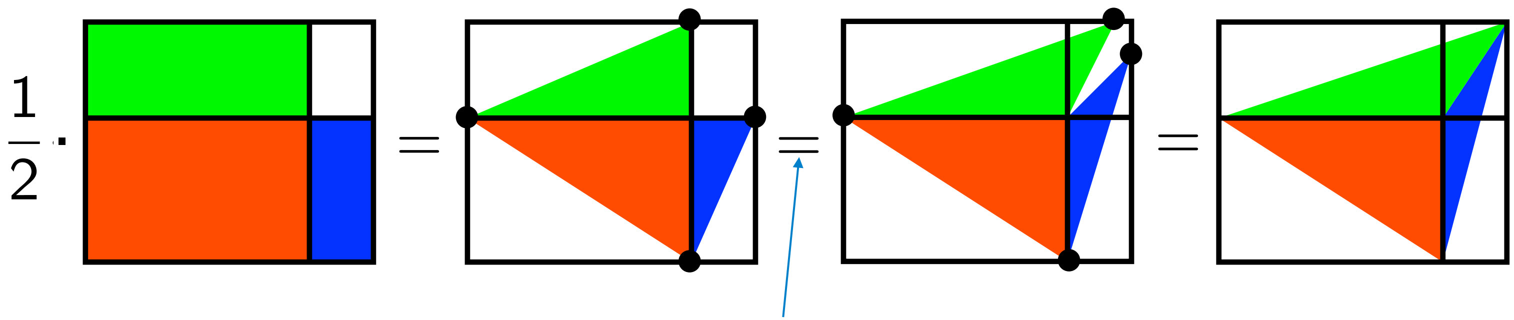
- Achtung: Achte auf den korrekten Umlaufsinn !!
- Beobachtung: Flächeninhalt = 0 ⇔ Det = 0 ⇔ Dreieck ist degeneriert ⇔ Punkte sind nicht affin unabhängig

Exkurs: Geometrischer Beweis der Flächenformel

- Zu zeigen:

$$\mathcal{F}(\Delta ABC) = \frac{1}{2}\left[\underbrace{(B_x - A_x)(C_y - A_y)} - \underbrace{(C_x - A_x)(B_y - A_y)}\right]$$





denn F(Dreieck) = ½ · Basis · Höhe

Beweis der Lösung 3

- Gegeben sei *A, B, C* ein Dreieck, und darin ein Dreieck *P, Q, R*
- Die baryzentrischen Koordinaten von *P, Q, R* bzgl. *A, B, C* seien

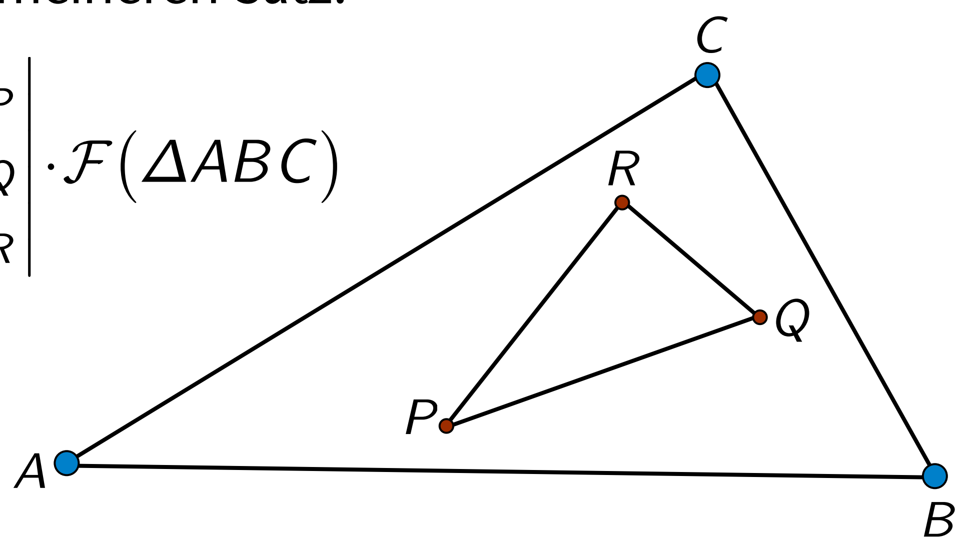
$$P : (\alpha_P, \beta_P, \gamma_P) \quad Q : (\alpha_Q, \beta_Q, \gamma_Q) \quad R : (\alpha_R, \beta_R, \gamma_R)$$

d.h.

$$P = \alpha_P A + \beta_P B + \gamma_P C$$

- Wir beweisen den etwas allgemeineren Satz:

$$\mathcal{F}(\Delta PQR) = \begin{vmatrix} \alpha_P & \beta_P & \gamma_P \\ \alpha_Q & \beta_Q & \gamma_Q \\ \alpha_R & \beta_R & \gamma_R \end{vmatrix} \cdot \mathcal{F}(\Delta ABC)$$



- Zur Erinnerung: Determinanten sind linear, d.h.

$$\begin{vmatrix} \vdots & \vdots & \vdots \\ s\mathbf{a}+t\mathbf{b} & \mathbf{c} & \mathbf{d} \\ \vdots & \vdots & \vdots \end{vmatrix} = s\cdot\begin{vmatrix} \vdots & \vdots & \vdots \\ \mathbf{a} & \mathbf{c} & \mathbf{d} \\ \vdots & \vdots & \vdots \end{vmatrix} + t\cdot\begin{vmatrix} \vdots & \vdots & \vdots \\ \mathbf{b} & \mathbf{c} & \mathbf{d} \\ \vdots & \vdots & \vdots \end{vmatrix}$$

- Damit braucht man $\mathcal{F}(\Delta PQR)$ nur noch ausrechnen:

$$2\mathcal{F}(\Delta PQR) =$$

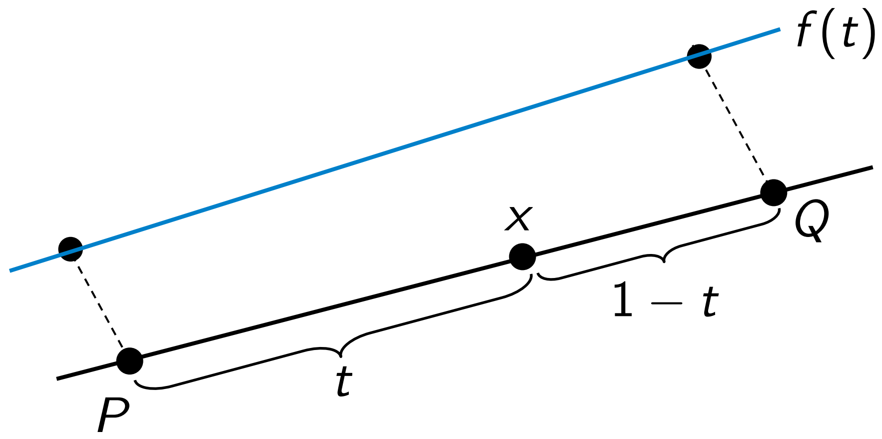
$$\begin{vmatrix} \alpha_P A_x + \beta_P B_x + \gamma_P C_x & \alpha_Q A_x + \beta_Q B_x + \gamma_Q C_x & \alpha_R A_x + \beta_R B_x + \gamma_R C_x \\ \alpha_P A_y + \beta_P B_y + \gamma_P C_y & \alpha_Q A_y + \beta_Q B_y + \gamma_Q C_y & \alpha_R A_y + \beta_R B_y + \gamma_R C_y \\ \underbrace{\alpha_P + \beta_P + \gamma_P}_{1} & \alpha_Q + \beta_Q + \gamma_Q & \alpha_R + \beta_R + \gamma_R \end{vmatrix} \quad (1)$$

$$
= \alpha_P \cdot \begin{vmatrix} A_x & \ldots \text{s. eq. (1)} \ldots & \ldots \\ A_y & \ldots & \ldots \\ 1 & \ldots & \ldots \end{vmatrix} + \beta_P \cdot \begin{vmatrix} B_x & \ldots & \ldots \\ B_y & \ldots & \ldots \\ 1 & \ldots & \ldots \end{vmatrix} + \gamma_P \cdot \begin{vmatrix} C_x & \ldots & \ldots \\ C_y & \ldots & \ldots \\ 1 & \ldots & \ldots \end{vmatrix}
$$

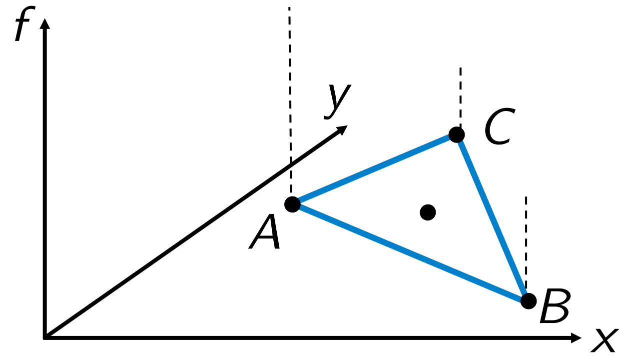
$$
\begin{aligned}
= \alpha_P \cdot & \left(\alpha_Q \underbrace{\begin{vmatrix} A_x & A_x & \ldots \\ A_y & A_y & \ldots \\ 1 & 1 & \ldots \end{vmatrix}}_{0} + \beta_Q \begin{vmatrix} A_x & B_x & \ldots \\ A_y & B_y & \ldots \\ 1 & 1 & \ldots \end{vmatrix} + \gamma_Q \begin{vmatrix} A_x & C_x & \ldots \\ A_y & C_y & \ldots \\ 1 & 1 & \ldots \end{vmatrix} \right) \\
+ \beta_P \cdot & \left(\alpha_Q \begin{vmatrix} B_x & A_x & \ldots \\ B_y & A_y & \ldots \\ 1 & 1 & \ldots \end{vmatrix} + \beta_Q \underbrace{\begin{vmatrix} B_x & B_x & \ldots \\ B_y & B_y & \ldots \\ 1 & 1 & \ldots \end{vmatrix}}_{0} + \gamma_Q \begin{vmatrix} B_x & C_x & \ldots \\ B_y & C_y & \ldots \\ 1 & 1 & \ldots \end{vmatrix} \right) \\
+ \gamma_P \cdot & \left(\alpha_Q \begin{vmatrix} C_x & A_x & \ldots \\ C_y & A_y & \ldots \\ 1 & 1 & \ldots \end{vmatrix} + \beta_Q \begin{vmatrix} C_x & B_x & \ldots \\ C_y & B_y & \ldots \\ 1 & 1 & \ldots \end{vmatrix} + \gamma_Q \underbrace{\begin{vmatrix} C_x & C_x & \ldots \\ C_y & C_y & \ldots \\ 1 & 1 & \ldots \end{vmatrix}}_{0} \right) \\
= \ldots &
\end{aligned}
$$

Erinnerung: lineare Interpolation

- Sei ein skalarer Wert f an P,Q vorgegeben: $f(P)=f_1$, $f(Q)=f_2$
- Dann kann man jedem Punkt X auf der Geraden $\overline{PQ}$ einen Wert $f(X)$ zuordnen
- Sei t der Parameter von X, also $f(X) = (1-t)\cdot f(P) + t\cdot f(Q)$
- Dann setze $X = (1-t)\cdot P + t\cdot Q$



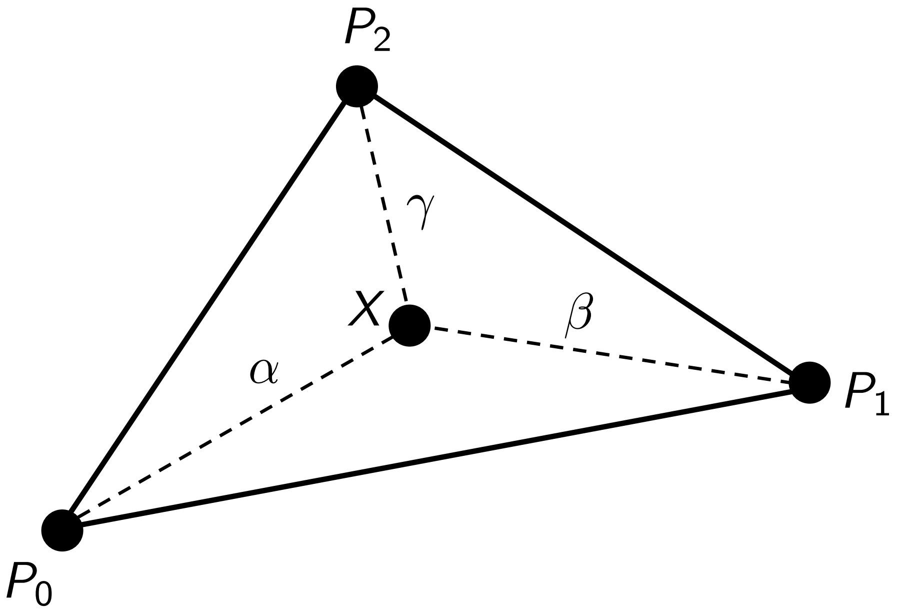
Anwendung: Baryzentrische Interpolation



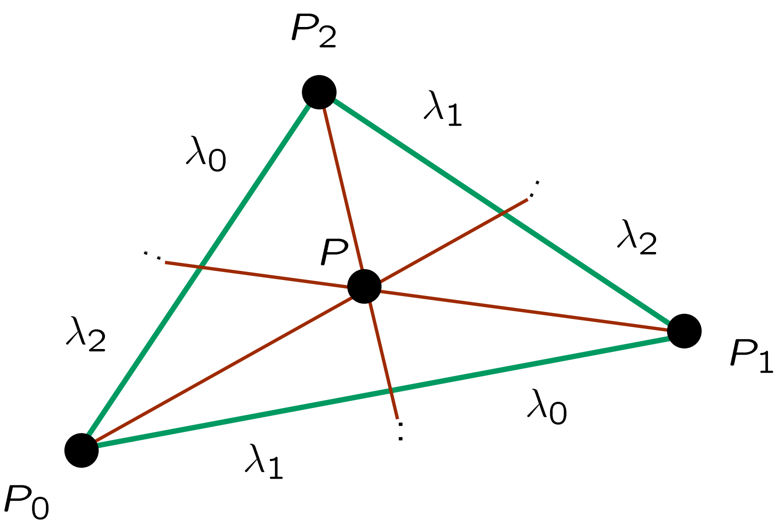
- Gegeben: "Höhen" f_A, f_B, f_C an den Punkten A, B, C (z.B. Grauwerte)
- Gesucht: Funktion f, so daß f_A, f_B, f_C interpoliert werden
- Idee: für einen beliebigen Punkt X, bestimme dessen baryzentrische Koordinaten, interpoliere damit die Funktionswerte
- Konkret: Sei $X = \alpha A + \beta B + \gamma C$
- Setze $f(X) = \alpha f_A + \beta f_B + \gamma f_C$
- Funktioniert auch für X außerhalb ΔABC
- Funktioniert auch für $f_A, f_B, f_C \in \mathbb{R}^m$
- Bem.: Auf den Kanten entspricht dies gerade einer linearen Interpolation

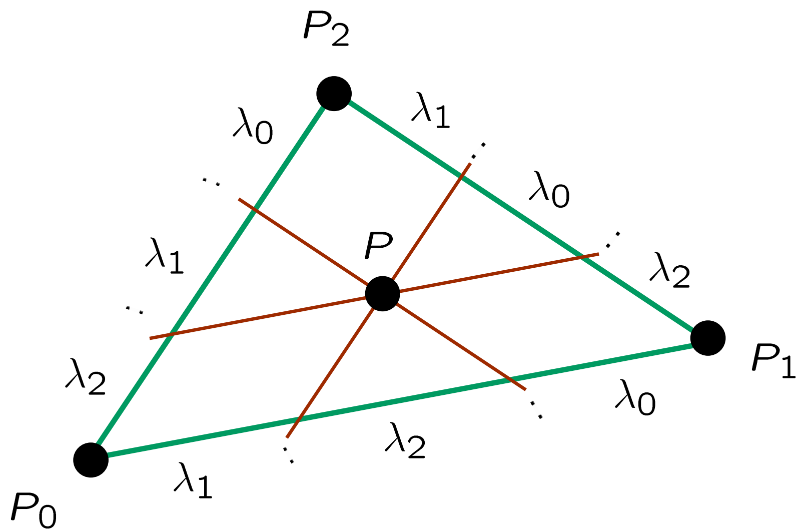
Weitere Anwendung: Punkt–in–Dreieck—Test

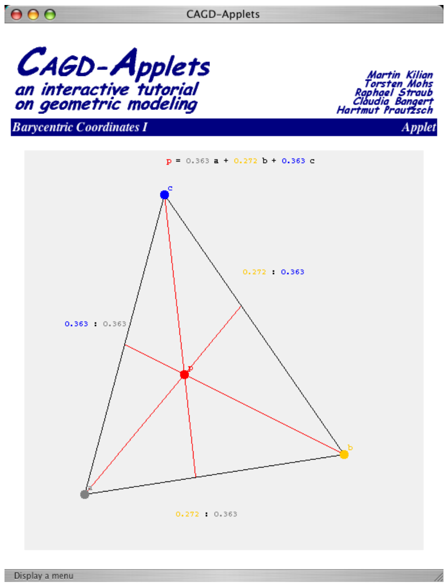
- Der Punkt *X* ist im Inneren des Dreiecks $\Leftrightarrow \ \alpha, \beta, \gamma > 0$

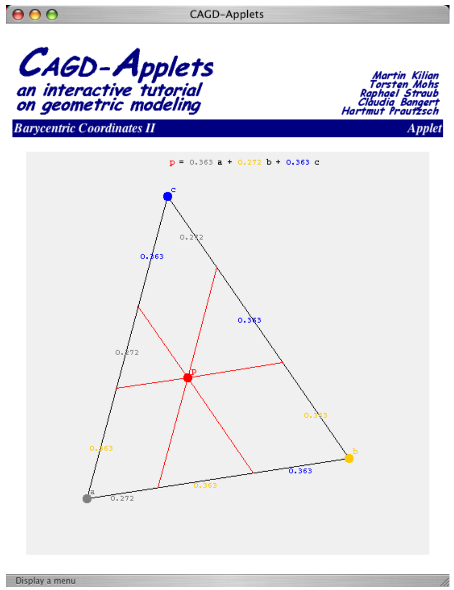


Geometrische Verhältnisse im Dreieck







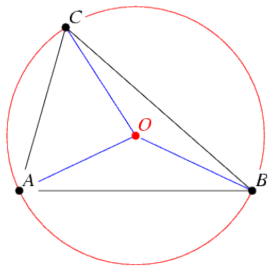


http://i33www.ibds.uni-karlsruhe.de/applets/

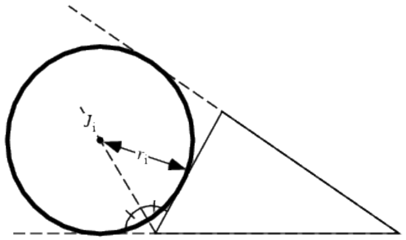
Spezielle Punkte im Dreieck

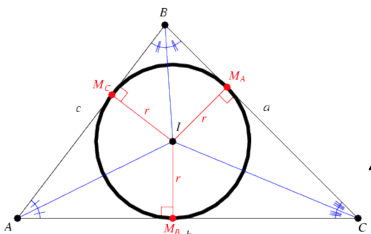
- Viele spezielle Punkte im Dreieck lassen sich mittels baryzentrischer Koordinaten sehr leicht angeben / ausrechnen (o. Bew.):

Punkt	α	β	γ
Schwerpkt.	1	1	1
Außenkreis zu A	$-a$	b	c
Inkreis	a	b	c
Umkreis	$a^2(b^2+c^2-a^2)$	$b^2(c^2+a^2-b^2)$	$c^2(a^2+b^2-c^2)$

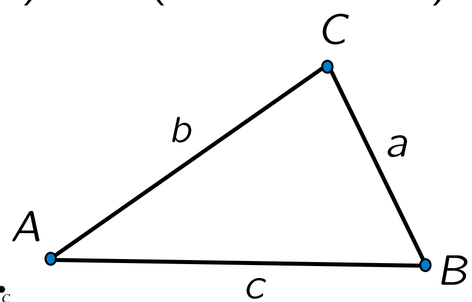


Umkreis


Außenkreis



Inkreis



Bezeichnungen

- Achtung: die Koordinaten sind ohne Normierung angegeben (sog. "homogene baryzentrische Koord.") — die muß man also vor einer tatsächlichen Berechnung noch durchführen