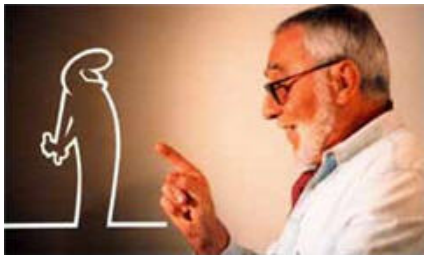
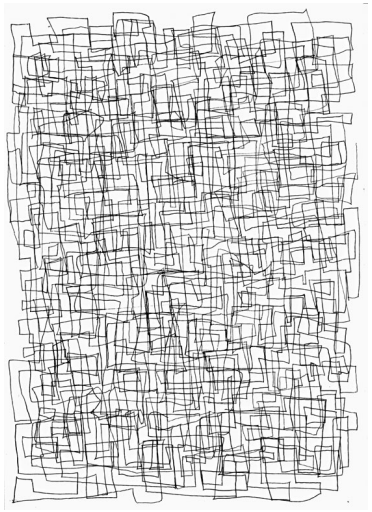
Bremen

CG VR

Computergraphik I
Scan Conversion of Lines





G. Zachmann

University of Bremen, Germany

cgvr.informatik.uni-bremen.de

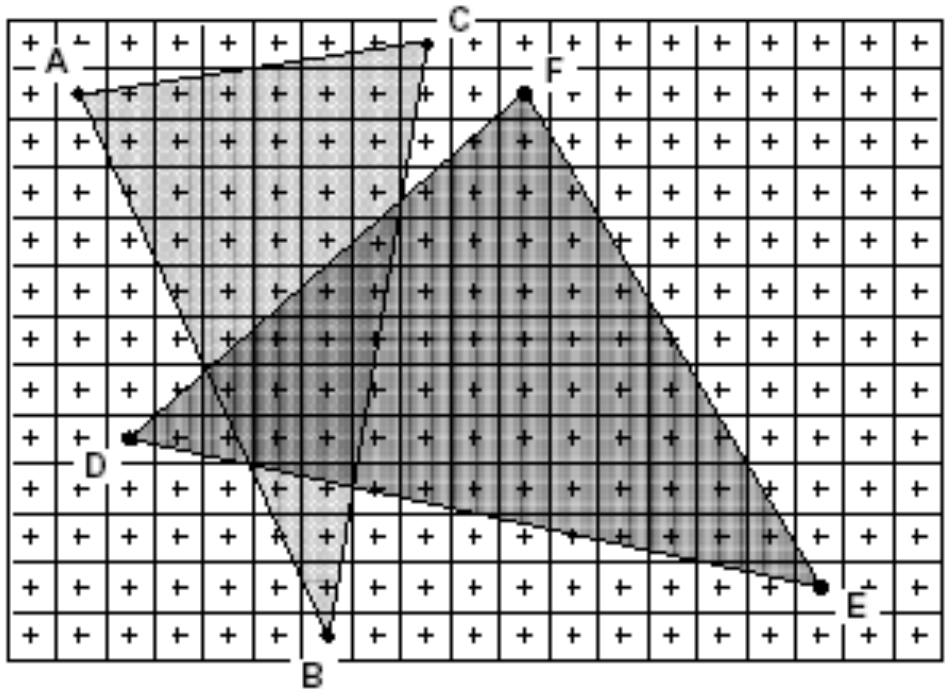
"La Linea"

Das Zeichnen von Linien

- Der Begriff Scan-conversion oder Rasterisierung bezeichnet allgemein das algorithmische Bestimmen, welche Pixel von dem Primitiv überdeckt werden
  - Der Name kommt von der Scan-Technik der Rasterdisplays
- Algorithmus für Linien ist grundlegend für 2D und 3D Computergraphiken
- (Linien zeichnen war einfacher bei Vektor Displays ;-))

Einordnung in die Pipeline

- Rasterisierung der Objekte in Pixel
- Ecken-Werte interpolieren (Farbe, Tiefenwert, ...)



Modell Transformation

Illumination (Shading)

Viewing Transformation (Perspective / Orthographic)

Clipping

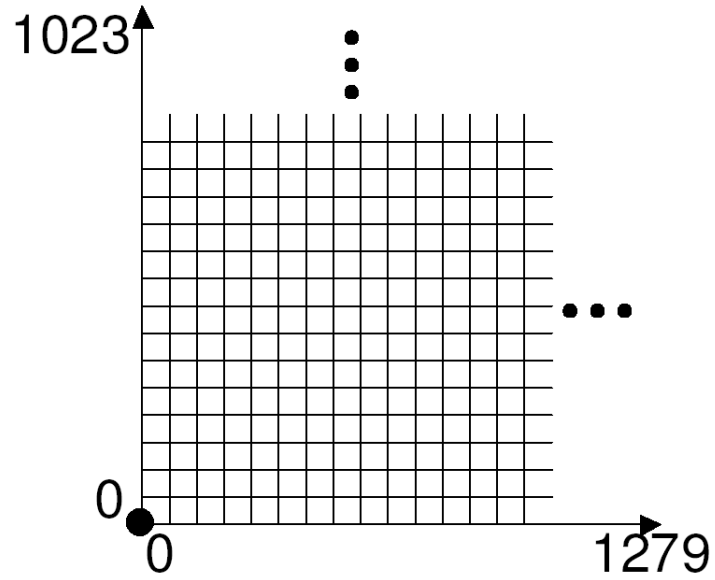
Projektion (in Screen Space)

Scan Conversion (Rasterization)

Visibility / Display

Das Frame-Buffer-Modell

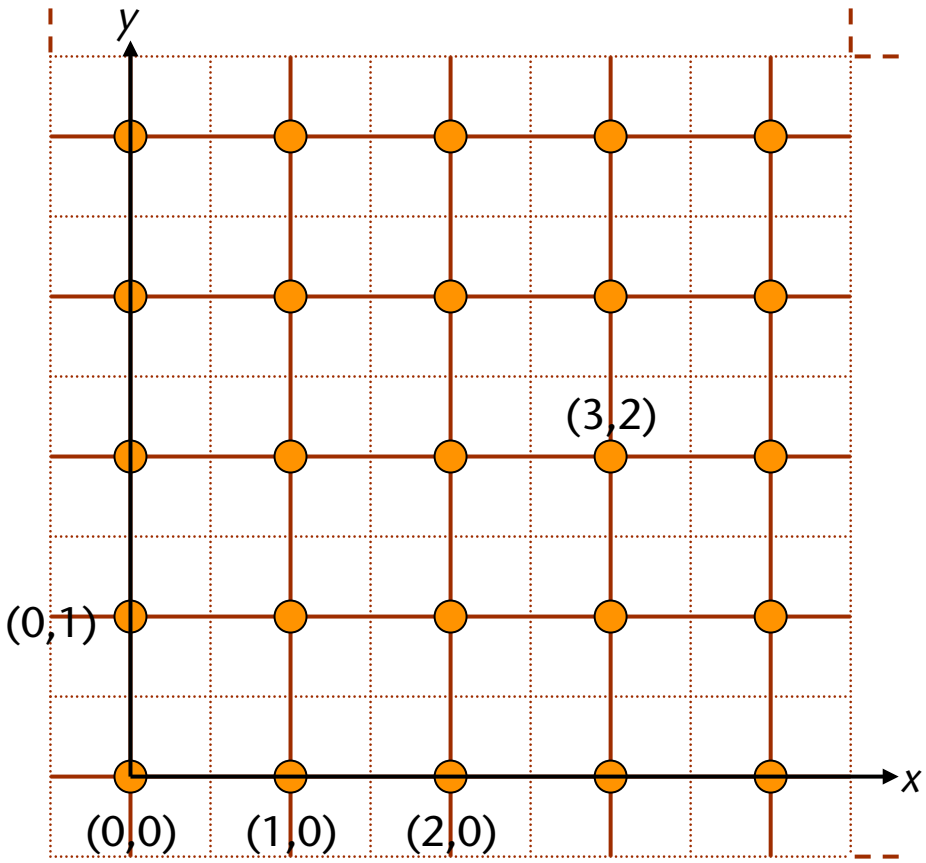
- Adressierung als 2D-Array



- Startadresse:
  - links oben (X11, Java AWT)
  - links unten (Open GL)

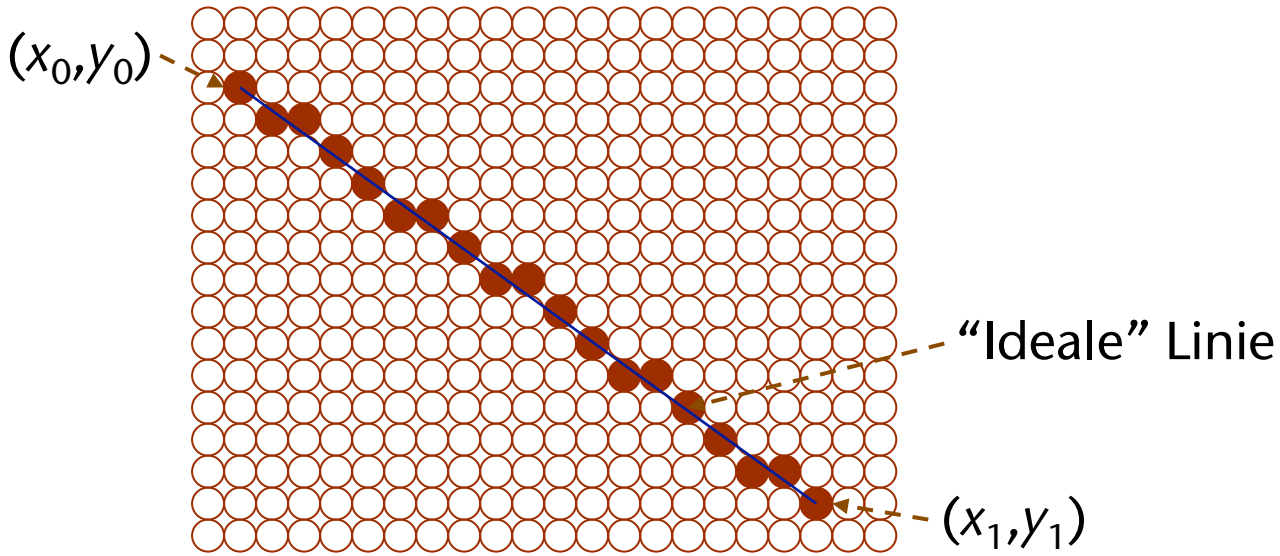
Bildschirmkoordinaten im Frame-Buffer-Modell

- Wir verwenden folgende 2D Bildschirmkoordinaten
  - Ganzzahlige Werte für *Mittelpunkte* der Pixel
  - Senkrecht = Y–Achse, Horizontal = X–Achse



Die Ideale Linie

- Keine Unterbrechungen (diagonale Schritte sind erlaubt)
- Einheitliche Stärke und Helligkeit
- Fehlerfreiheit (setze nur die "nähesten" Pixel an der idealen Linie)
- Geschwindigkeit (wie schnell kann die Linie gezeichnet werden?)
- Invarianz gegenüber Zeichenrichtung



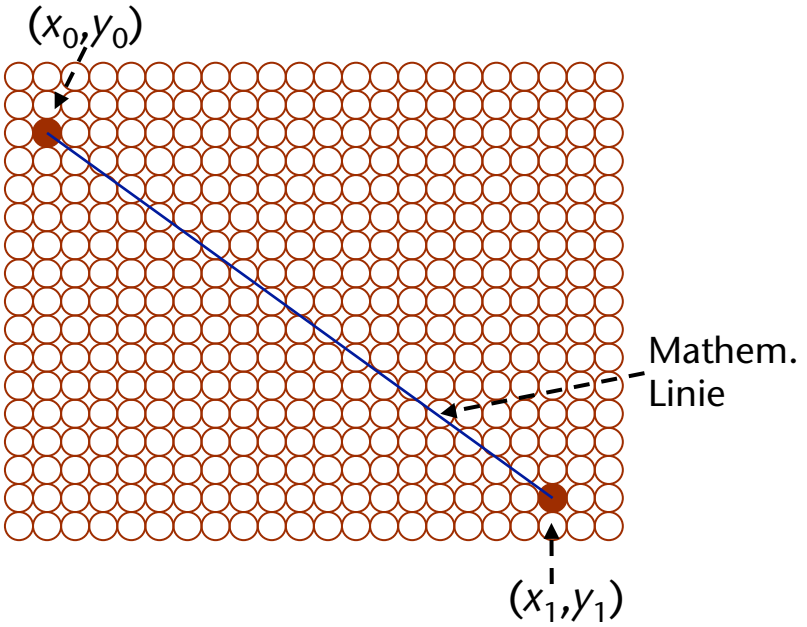
Spezifikation der Aufgabe

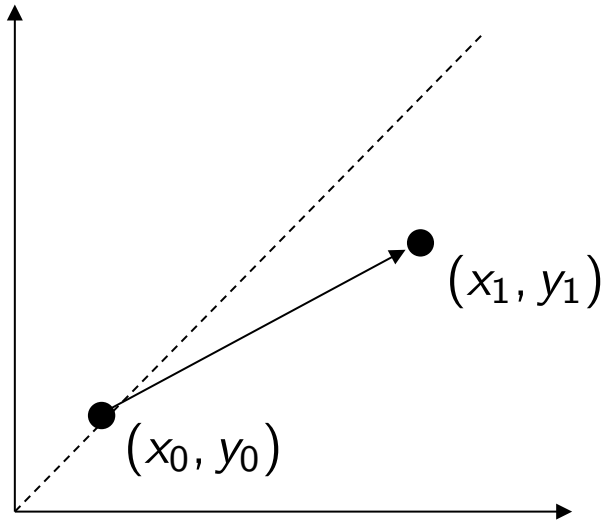
- Gegeben: Endpunktkoordinaten einer Linie
- Vereinfachungen:
  - Ganzzahlige Koordinaten
  - Geradengleichung:

    $$y = mx + b$$

  - Mit $0 \leq m \leq 1$

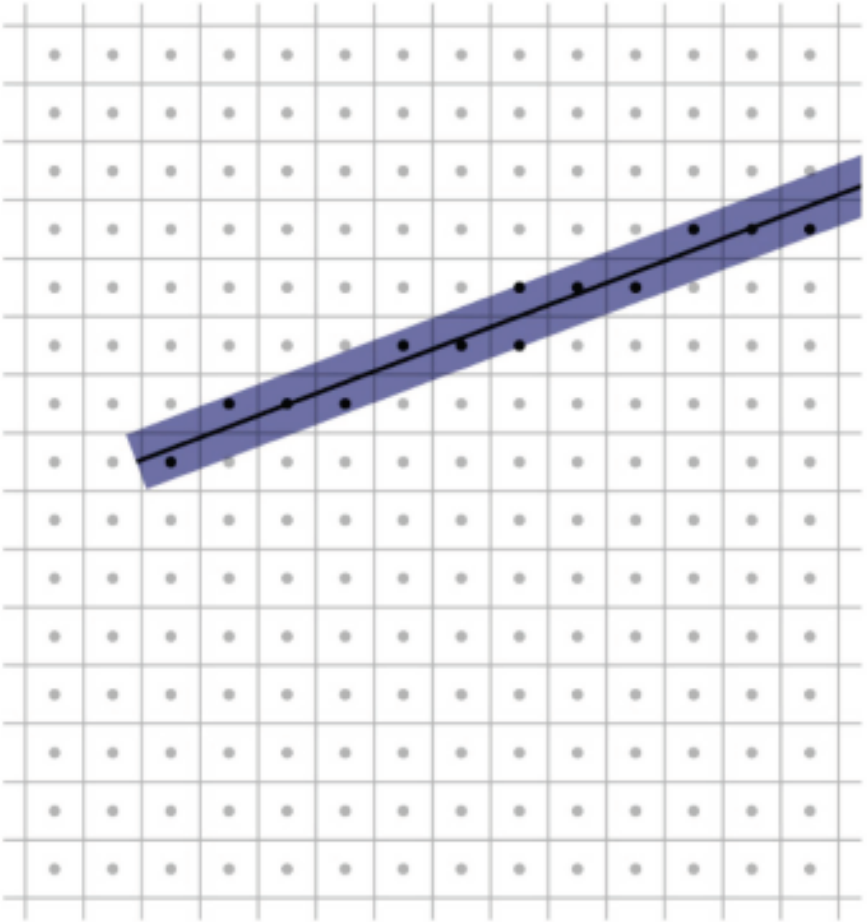
    und $x_0 < x_1$
  - Alle übrigen Fälle bekommt man durch Vertauschen / Spiegeln
- Ausgabe: Folge von Pixeln (= rasterisierte Linie)





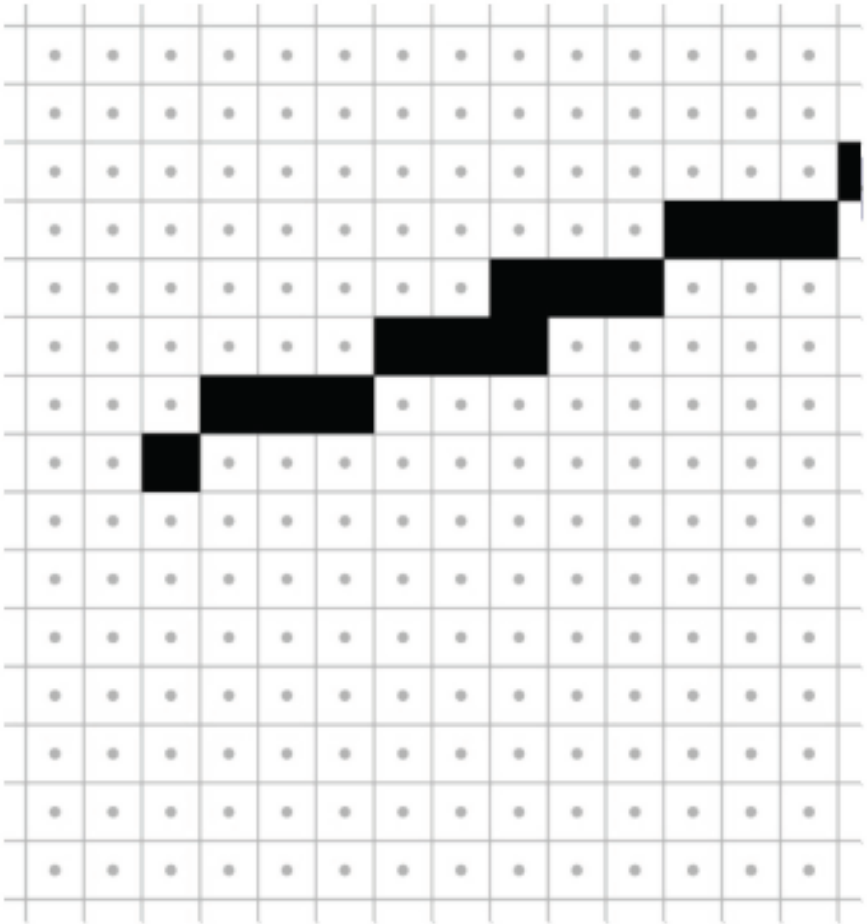
Erster Versuch der Scan-Konv. einer Linie

- Betrachte Linie als schmales Rechteck
- Zeichne alle Pixel, deren Zentrum im Inneren liegt

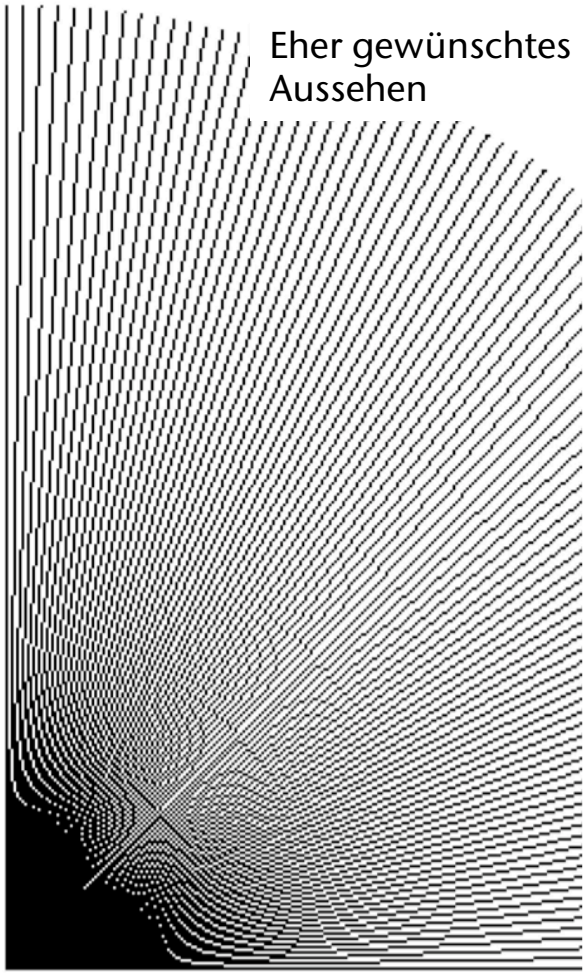


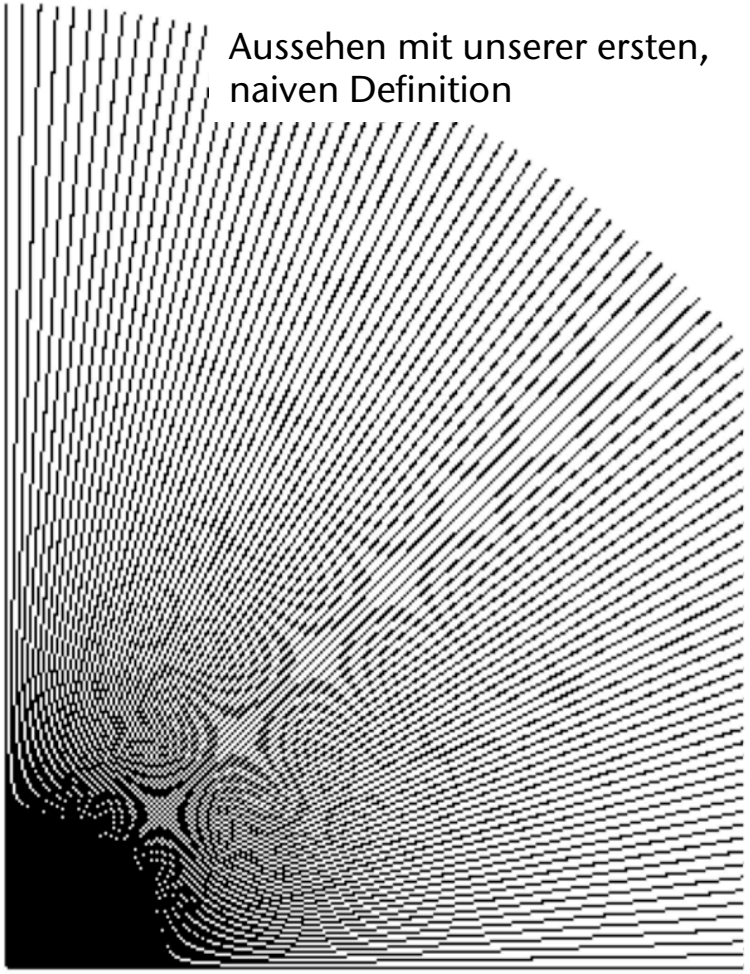
- Betrachte Linie als schmales Rechteck
- Zeichne alle Pixel, deren Zentrum im Inneren liegt

1. Problem: manchmal werden vertikal übereinander liegende Pixel gesetzt → unterschiedliche scheinbare Linienstärke



2. Problem:

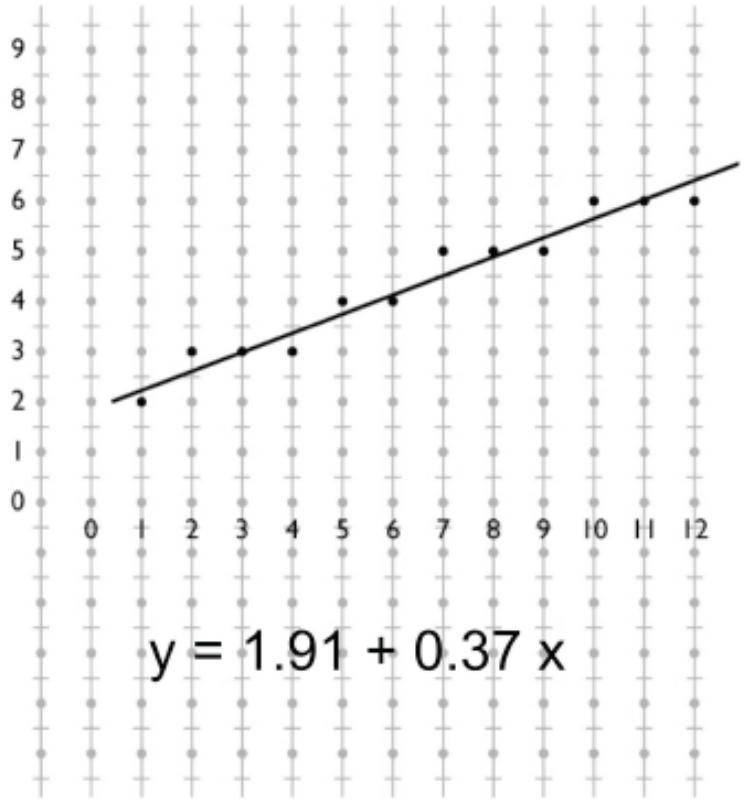

Eher gewünschtes
Aussehen


Aussehen mit unserer ersten,
naiven Definition

Erster einfacher Algorithmus

- Einfacher Algorithmus: werte Gleichung der Linie 1 Mal pro Spalte (pro x-Koord.) aus

```
for x = ceil(x0) .. floor(x1):
    y = b + m*x
    setPixel( x, round(y) )
```



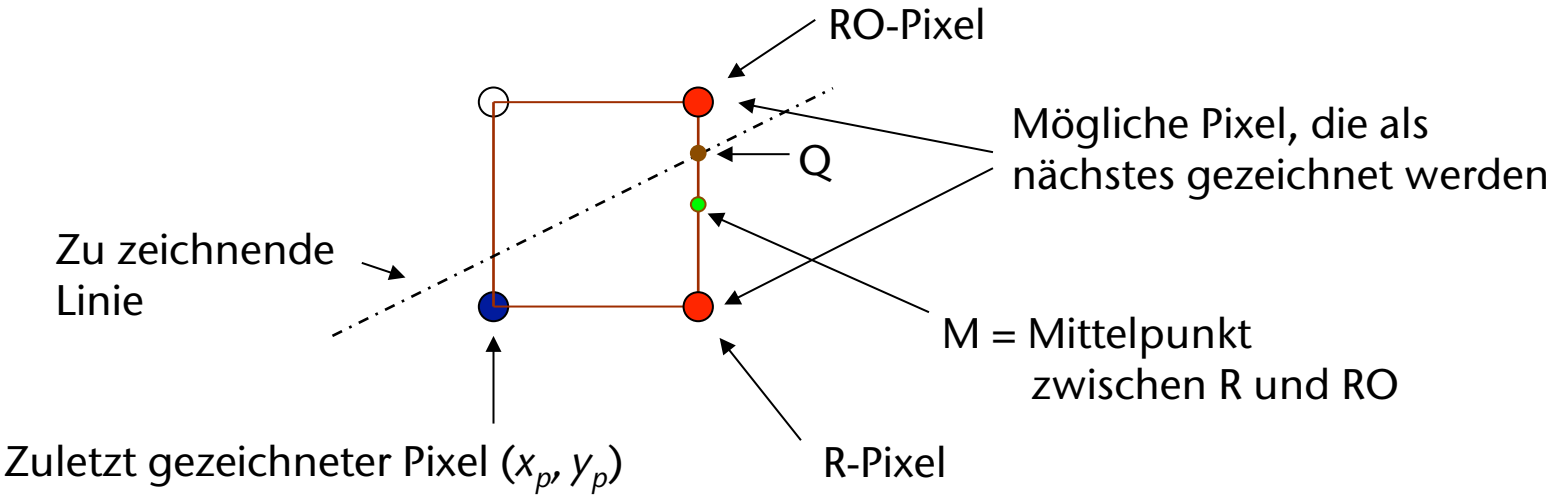
- Probleme:
  - Floating-Point,
  - Mult. und Runden sind (rel.) langsam

Enter Bresenham

Clip from Bresenham's Keynote Talk at WSCG'03

Generelles Vorgehen und Terminologie

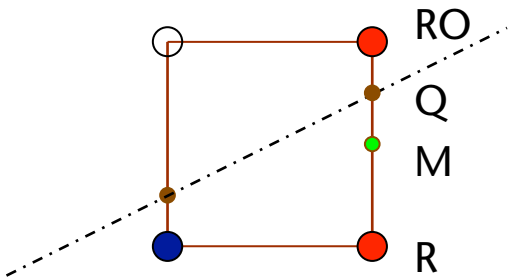
- Bei jedem X-Schritt gibt es nur zwei Möglichkeiten für die Y-Koordinate:
  - entweder bleibt die Y-Koord gleich;
  - oder die Y-Koord erhöht sich um genau 1 Pixel
- Die Situation & Bezeichnungen:



  - Q = Schnittpunkt der Linie mit Gridline $x_P + 1$

Zwei Varianten des Linien-Zeichen-Algos

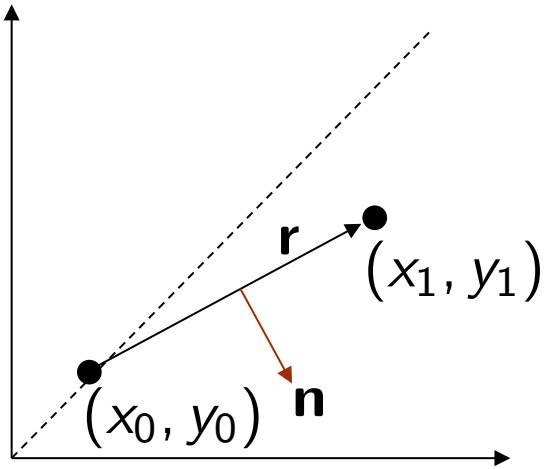
- Ursprünglicher "Bresenham-Algorithmus" [1962]:
  - Bestimme Distanz zwischen RO und Q und zwischen R und Q
  - Bestimme Differenz zwischen den Distanzen
  - Vorzeichen des Ergebnisses legt fest, welcher Pixel eingefärbt wird
- Heute populärer, der Midpoint-Algo:
  - Bestimme, auf welcher Seite der Linie der Mittelpunkt M liegt
  - M = oberhalb → färbe Pixel R
  - M = unterhalb → färbe Pixel RO



Der Midpoint-Algorithmus

- Wie kann man einfach bestimmen, auf welcher Seite der Linie man sich befindet?
- Verwende implizite Form der Linie:

$$F(x,y) := \mathbf{n} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} - c = 0$$



$$\mathbf{r} = \begin{pmatrix} x_1 - x_0 \\ y_1 - y_0 \end{pmatrix} = \text{ Richtungsvektor}$$

$$\mathbf{n} = \begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 - y_0 \\ x_0 - x_1 \end{pmatrix} \quad \text{ist senkrecht dazu}$$

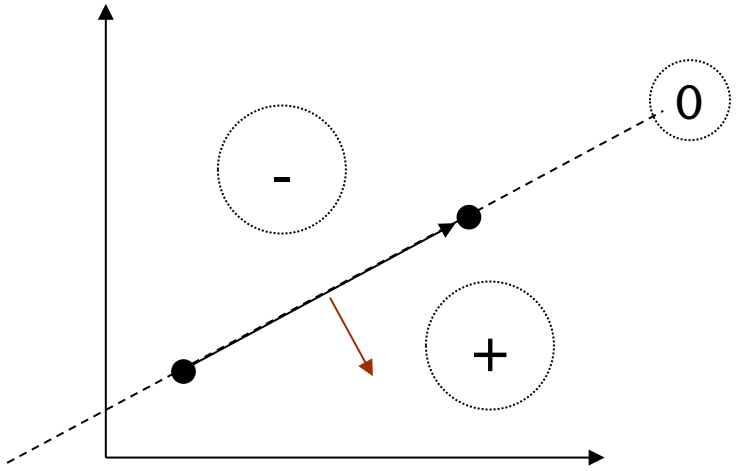
$$F(x_0, y_0) = 0 \text{ liefert } \quad c = x_0 y_1 - y_0 x_1$$

- Gegeben sei (x, y). Dann ist

  F(x,y) = 0, wenn (x,y) auf der Linie liegt

  F(x,y) < 0, wenn (x,y) oberhalb der Linie liegt

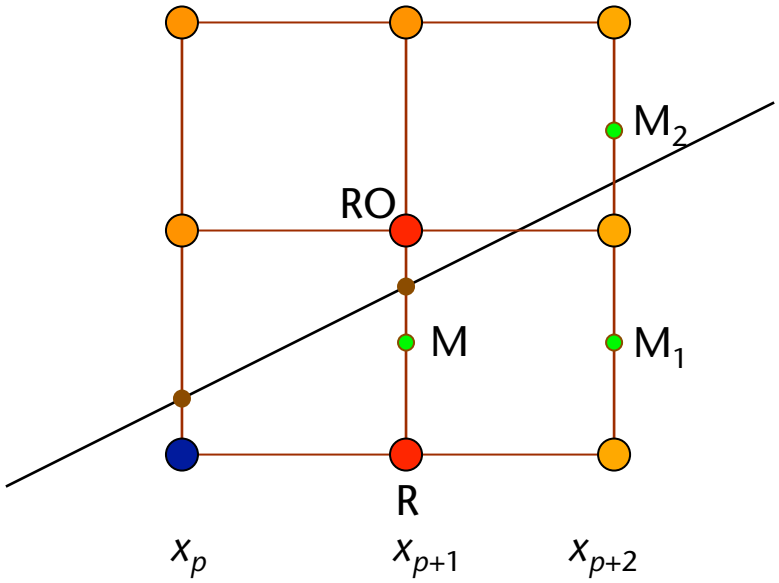
  F(x,y) > 0, wenn (x,y) unterhalb der Linie liegt



- Definiere "Entscheidungsvariable" *d*:

$$d = F(M) = F(x_p + 1, y_p + \tfrac{1}{2})$$

- Für den Midpoint-Algo, betrachte das Vorzeichen von *d*:
  - Wenn $d > 0$, färbe RO
  - Wenn $d < 0$, färbe R
- Was ist mit dem nächsten Schritt?
- Annahme: wir haben $d = F(M)$



1. Fall: R wurde ausgewählt → nächstes M ist M_1

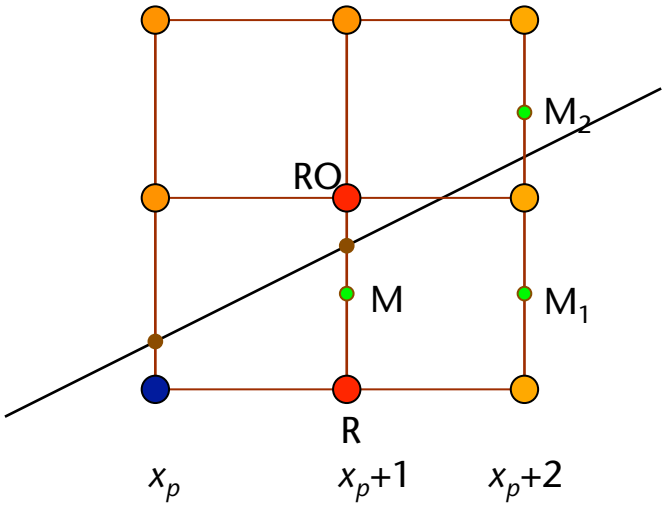
$$
\begin{aligned}
d_{old} &= F(M) \\
&= F\left(x_p + 1, y_p + \tfrac{1}{2}\right) \\
&= n_1\left(x_p + 1\right) + n_2\left(y_p + \tfrac{1}{2}\right) + c
\end{aligned}
$$

und

$$
\begin{aligned}
d_{new} &= F(M_1) \\
&= F\left(x_p + 2, y_p + \tfrac{1}{2}\right) \\
&= n_1\left(x_p + 2\right) + n_2\left(y_p + \tfrac{1}{2}\right) + c
\end{aligned}
$$

somit

$$d_{\text{new}} = d_{\text{old}} + n_1$$



2. Fall: RO wurde ausgewählt → nächstes M ist M_2

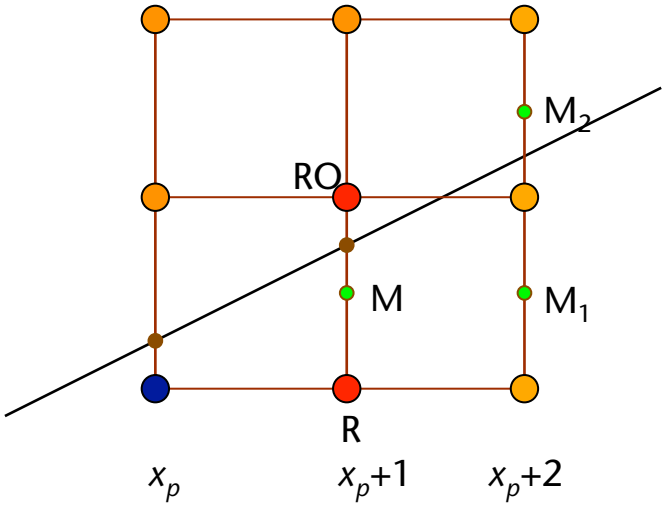
$$
\begin{aligned}
d_{old} &= F(M) \\
&= F\left(x_p + 1, y_p + \tfrac{1}{2}\right) \\
&= n_1\left(x_p + 1\right) + n_2\left(y_p + \tfrac{1}{2}\right) + c
\end{aligned}
$$

und

$$
\begin{aligned}
d_{new} &= F(M_2) \\
&= F\left(x_p + 2, y_p + \tfrac{3}{2}\right) \\
&= n_1\left(x_p + 2\right) + n_2\left(y_p + \tfrac{3}{2}\right) + c
\end{aligned}
$$

somit

$$d_{\text{new}} = d_{\text{old}} + n_1 + n_2$$



- Pseudo-Code des Midpoint-Algo:

```
berechne n1, n2, c
x, y ← x0, y0
```

$$d \leftarrow F(M) = F(x_0 + 1, y_0 + \frac{1}{2}) = n_1 + \frac{n_2}{2}$$

```
setze d1 ← n1, d2 ← n1 + n2
while x ≤ x1:
    zeichne Pixel (x,y)
    x += 1
    if d > 0:
        y += 1
        d += d2
    else:
        d += d1
```

- Achtung: in obigen Pseudo-Code ist evtl. $d = \frac{k}{2}$
  - Lösung: ...

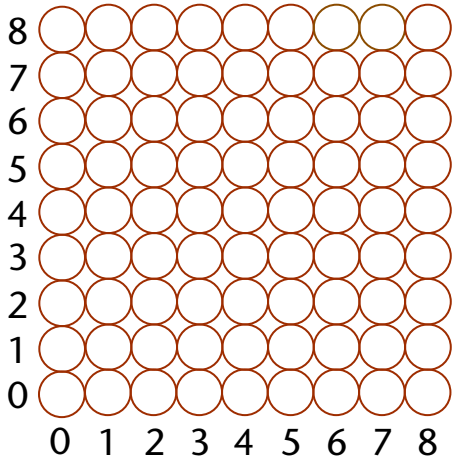
Beispiel

- Zeichne Linie von (1,2) nach (5,5)

```
x, y ← x0, y0
```

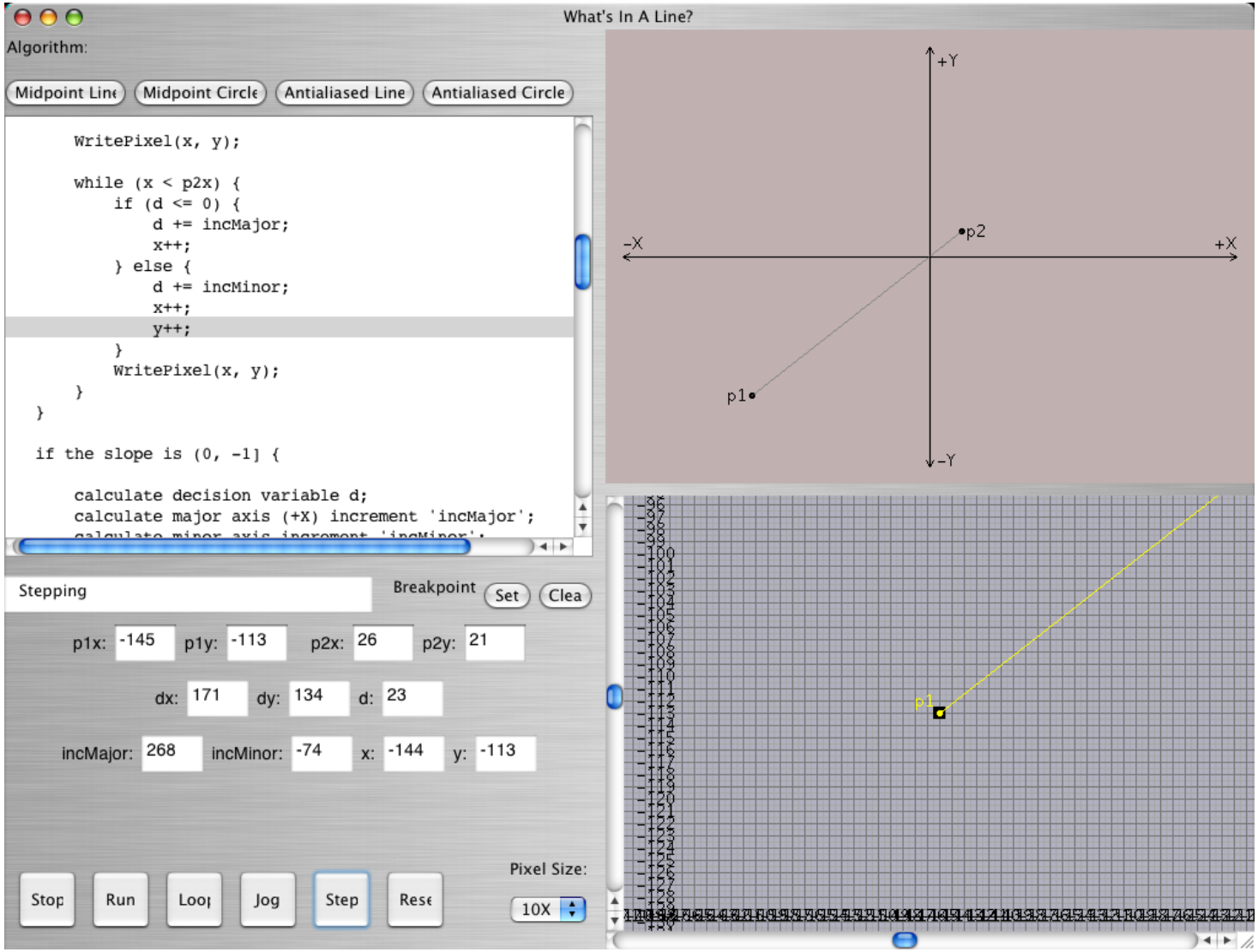
$$d \leftarrow F(M) = F(x_0 + 1, y_0 + \frac{1}{2}) = n_1 + \frac{n_2}{2}$$

```
setze d1 ← n1, d2 ← n1 + n2 while
x ≤ x1:
    zeichne Pixel (x,y)
    x += 1
    if d < 0:
        y += 1
        d += d2
    else:
        d += d1
```



n_1	n_2	d_1	d_2	d	x	y

Demo



http://www.cs.rit.edu/~ncs/whatsInALine/whatsInALine.html

Bemerkungen

- Auch bekannt als DDA (digital differential analyzer)

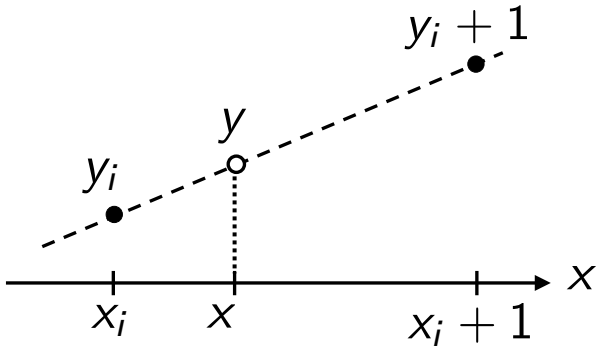
MADDIDA (Magnetic Drum Digital Differential Analyzer, Northrop Aircraft) 1952

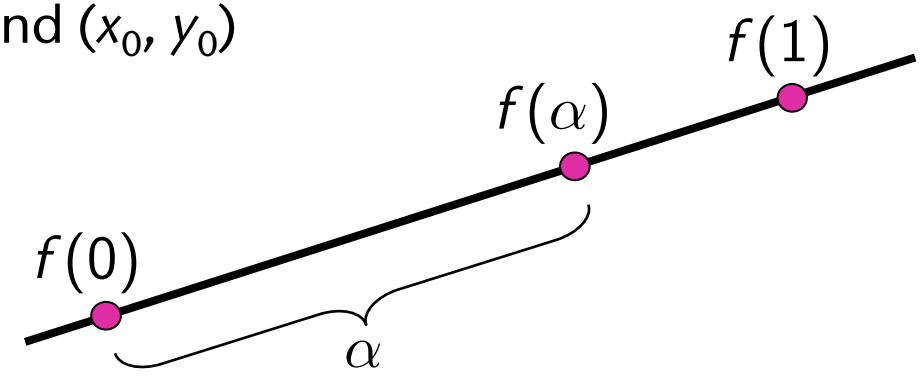
- Algorithmische Technik: inkrementelle Berechnung (inkrememteller Algorithmus)

Interpolation von Attributen

- Häufig haben Eckpunkte weitere Attribute (außer der Pos.)
  - Z.B. verschiedene Farben
- Ziel: ein gleichmäßiger Farbverlauf entlang der Linie
- Idee: lineare Interpolation
- Im 1D: $f(x) = (1 - \alpha)y_0 + \alpha y_1$

  mit $\alpha = (x - x_0)/(x_1 - x_0)$
- Im 2D ist α gerade die normierte(!) Distanz zwischen (x, y) und (x_0, y_0)



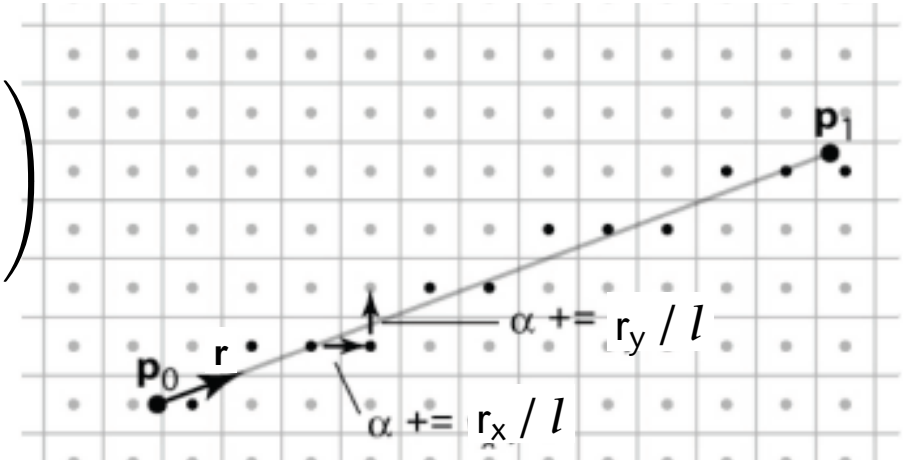


- Problem: Pixel liegen i.A. *nicht* genau auf der Linie
- Definiere 2D Funktion zur Projektion auf die Linie:

$$\alpha = \frac{\mathbf{r}\cdot(\mathbf{Q}-\mathbf{P}_0)}{l}$$

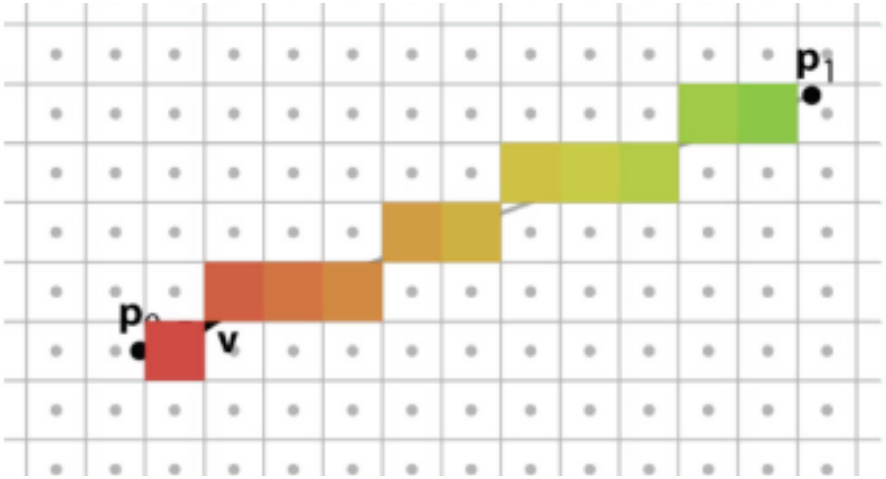
$$l = \|\mathbf{P}_1 - \mathbf{P}_0\|$$

$$f(\alpha) = (1-\alpha)\begin{pmatrix} r_0 \\ g_0 \\ b_0 \end{pmatrix} + \alpha\begin{pmatrix} r_1 \\ g_1 \\ b_1 \end{pmatrix}$$



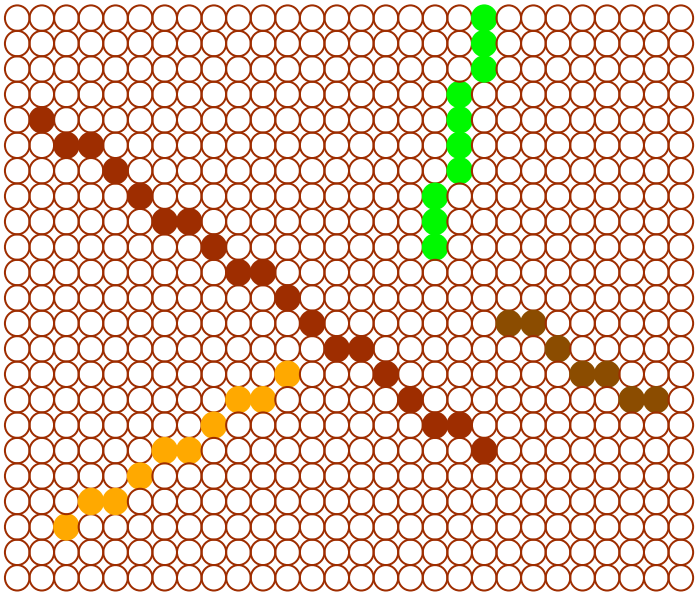
- Beobachtung: *f* ist *linear* in Q_x und Q_y
- Verwende DDA zur inkrementellen Berechnung von *f*

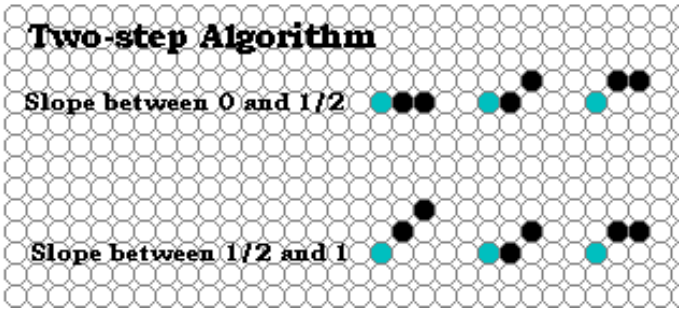
- Resultat:



Geschwindigkeitssteigerung

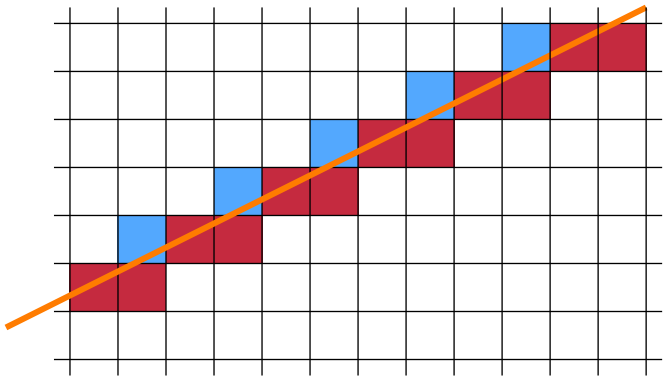
- Sind rasterisierte Linien symmetrisch?
- Abhängig von der Länge:
  - Gerade # an Pixel → ja
  - Ungerade # an Pixel →
    ja, bis auf 1 Pixel
- Idee: zeichne von beiden Seiten
  [Rokne et al., 1990]
- Man kann 2 Pixel zeichnen mit:
  - 1 Vergleich
  - 1 Update der Entscheidungsvariable d
- Weiterhin: mit 1 Test kann man die nächsten 2 Pixel entscheiden
  [Wyvill et al., 1990]





Das letzte(?) Quentchen Geschwindigkeit

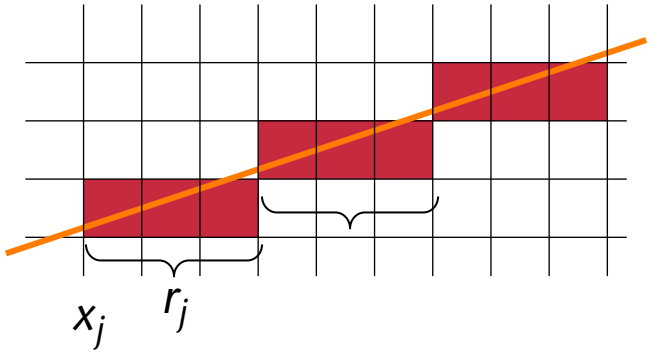
- Vereinfachungen (zunächst):
  1. Betrachte (unendliche) Linien mit $y = mx$, $0 \leq m \leq 1$
  2. Betrachte nur die Folge der roten Zellen = Zellen, die an ihrer linken Kante von der Linie geschnitten werden



- Bezeichnungen:
  - Zelle wird identifiziert durch deren linken unteren Eckpunkt (x_j,y_j)
  - Span := Folge von Zellen mit gleicher y-Koord.
  - Länge des j-ten Spans = r_j

- Beobachtung: die diskrete Linie ist vollständig durch die Folge der Span-Längen definiert, denn

$$(x_{j+1}, y_{j+1}) = (x_j + r_j, y_j + 1)$$



- Satz (o. Bew.):

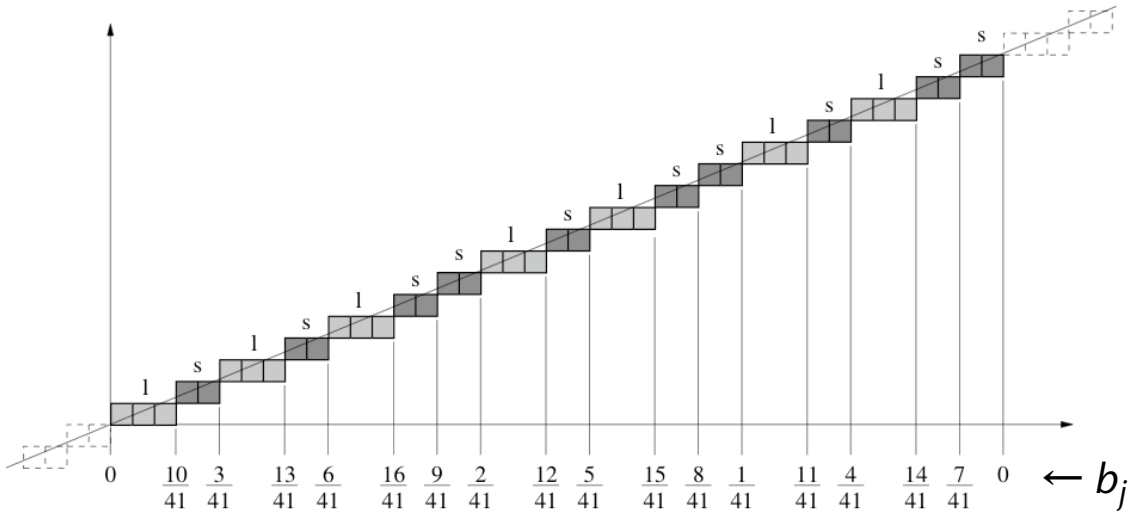
  Alle Spans der diskretisierten Linie haben nur *eine von höchstens zwei verschiedenen* Längen, nämlich

$$\forall j : \; r_j = r \;\vee\; r_j = r + 1$$

- Klar ist:

$$\tfrac{1}{2} \leq m \leq 1 \;\Rightarrow\; r = 1$$

- Beispiel:



- Beobachtung: wenn wir ein seeehr langes Segment der Linie betrachten, dann gilt

$$\frac{\#\ \text{Spans}}{\#\ \text{Zellen}} = \frac{\Delta y}{\Delta x} \approx m$$

- Folge: aus der Steigung kann man die Span-Länge r (bzw. r+1) berechnen:

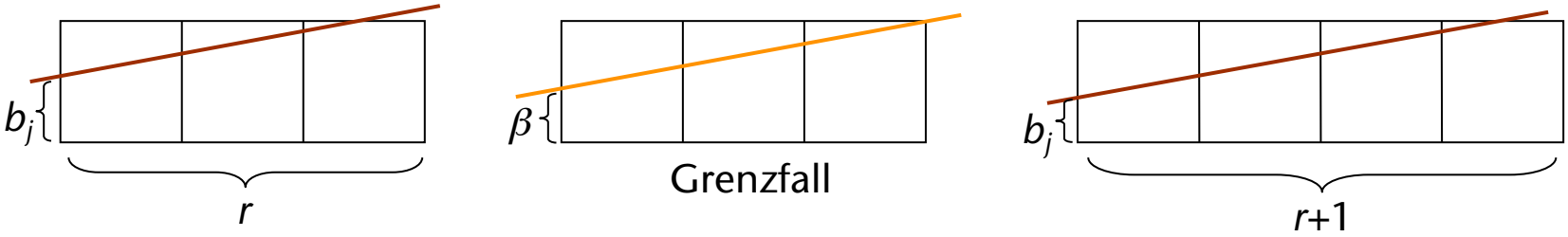
$$\frac{1}{m} = \text{ mittlere Span-Länge}$$

$$= \text{Mittelwert von } r \text{ und } r+1 \Rightarrow$$

$$r = \left\lfloor \frac{1}{m} \right\rfloor \ , \ r+1 = \left\lceil \frac{1}{m} \right\rceil$$

- Im Folgenden: Berechnung von r_j , m.a.W., Methode zur Entscheidung, ob man einen "langen Span" oder einen "kurzen Span" hat

- Wovon hängt es ab, ob man einen langen / kurzen Span hat?



- Fazit: falls $b_j \geq \beta$, dann kurzer Span, sonst langer Span
- Bestimmung von β: $b_j = mx_j - y_j$

$$b_{j+1} - b_j = mr_j - 1$$

Im Grenzfall ist $b_{j+1} = 0$ und $b_j = \beta$, also

$$\beta = 1 - mr = 1 - m \left\lfloor \frac{1}{m} \right\rfloor$$

- Das nächste b_{j+1} ist also:

  falls kurzer Span $\rightarrow$ $b_{j+1} = b_j - \beta$

  falls langer Span $\rightarrow$ $b_{j+1} = b_j + m - \beta$

- Damit hat man einen iterativen, sehr effizienten Algo zur Aufzählung aller Zellen, die von einer Linie getroffen werden
- Weiteres (lästiges) Detail:
  - Bei einem Strahl ist der erste Span i.A. gekürzt
  - Soll hier nicht weiter vertieft werden

Speedup gegenüber einfachem DDA

- Komplexität:

  O(n) bei DDA (z.B. Midpoint),

  O(n/r) mit der Span-basierten Methode,

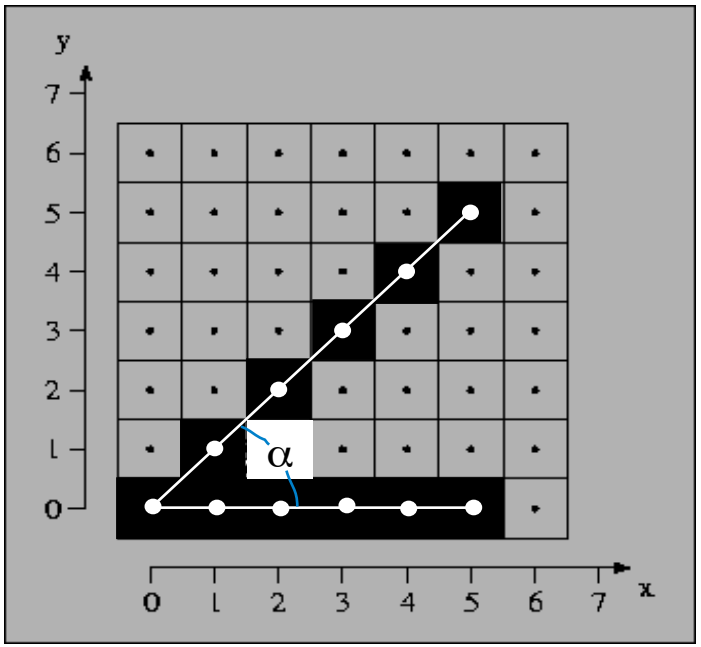
  n = Anzahl Zellen auf dem Strahl, r = mittlere Span-Länge

- In Zahlen:
  - Ca. Faktor 2 schneller über alle mögliche Orientierungen des Strahls

Weitere Überlegungen

- Gewünscht: einheitliche Stärke und Helligkeit
- Bei gleicher Pixelzahl sind schräge Linien länger als horizontale
- Ändere Intensität der Linie gemäß der Steigung
- Skaliere den Grauwert um den Faktor

$$\cos(45^\circ - \alpha)\,, \quad \alpha = 0^\circ \ldots 45^\circ$$



- Was ist bei gemusterten Linien? (gestrichelte Linie, etc.)

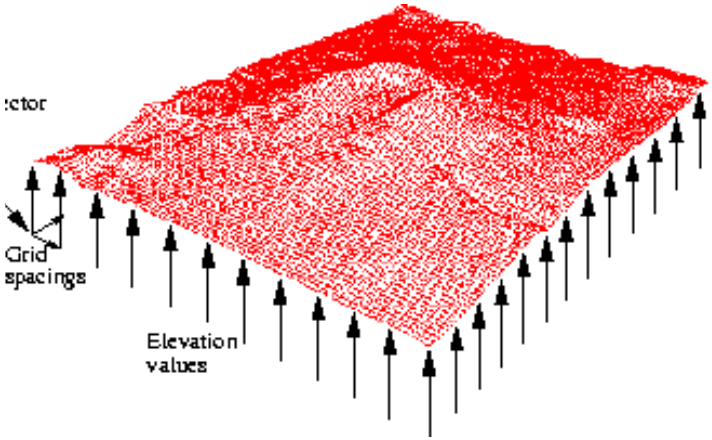
Beispiel für eine Anwendung der DDA-Technik: Ray-Tracing von Height Fields [Henning & Stephenson, 2004]

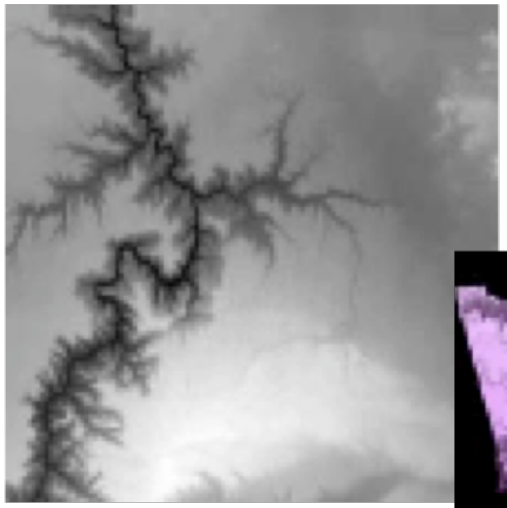
- Height Field = alle Arten von Flächen, die sich als Funktion

$$z = f(x, y)$$

schreiben lassen

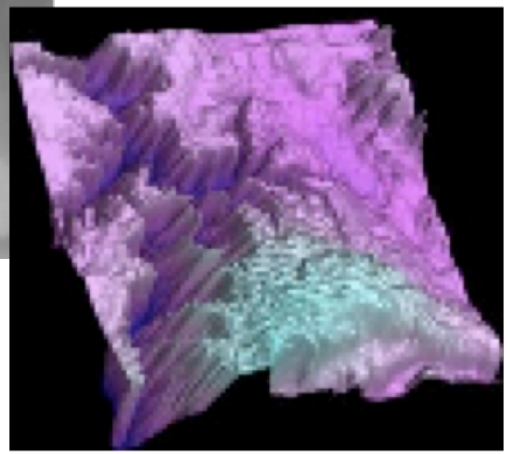
  - Z.B.: Terrain, Meßwerte über einer Ebene, 2D-Skalarfeld, ...





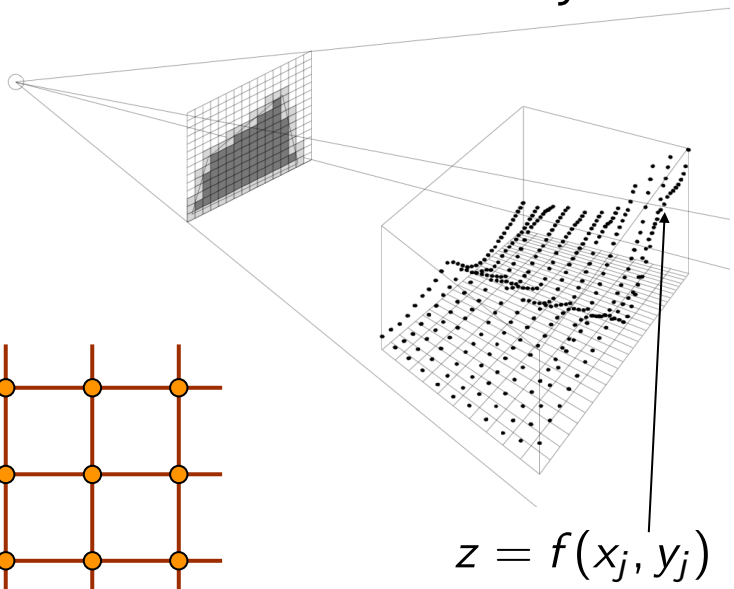
Height field
(= Bitmap)

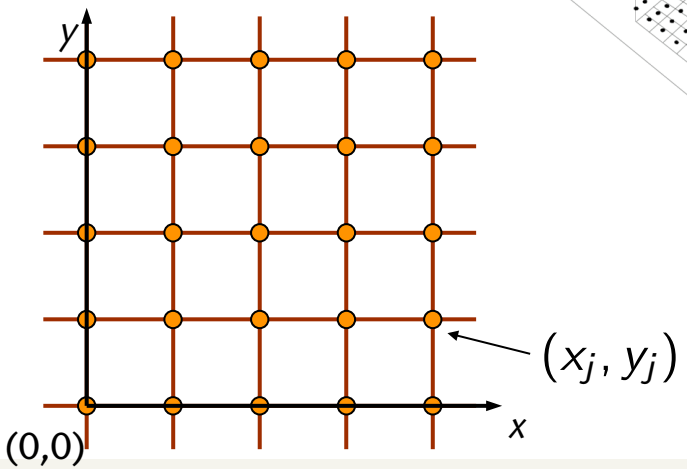
Rendered



Situation

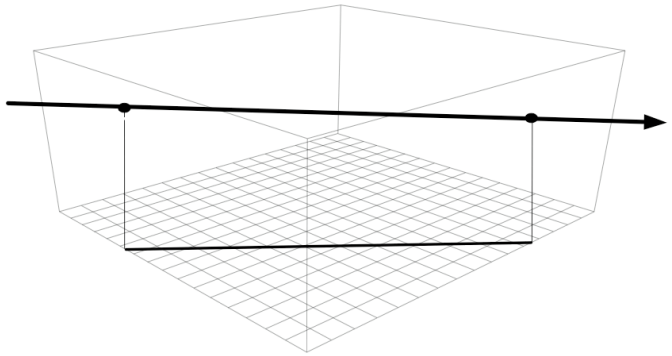
- Die naive Methode, ein Height-Field zu raytracen:
  - Konvertiere das n×n Feld in $2n^2$ Dreiecke, teste Strahl gegen jedes
  - Probleme: langsam, benötigt viel Speicher
- Ziel: direktes Ray-Tracing des Height-Fields aus dem 2D-Array
- Gegeben:
  - Strahl
  - Feld [0...n]×[0...n] als Float-Array
  - Höhenwerte liegen auf den Gitterknoten vor



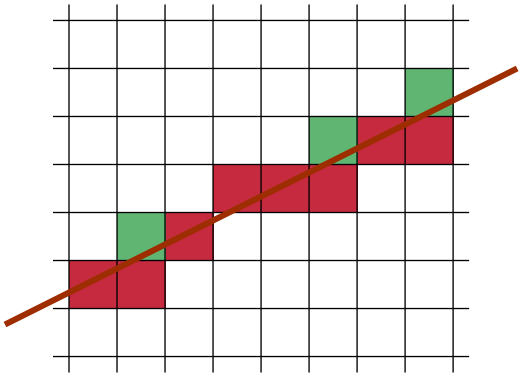


Algorithmus

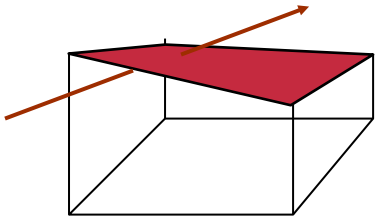
1. Dimensionsreduktion
   - Projiziere Strahl in xy-Ebene



2. Alle Zellen der Reihe nach besuchen, die vom Strahl geschnitten werden (und nur diese)
   - Ähnlich zu Scan-Conversion, aber mit zusätzlichen Zellen

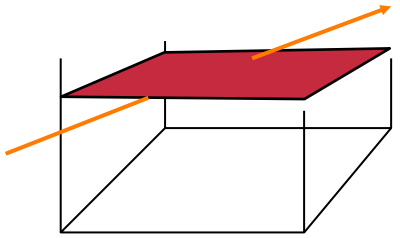


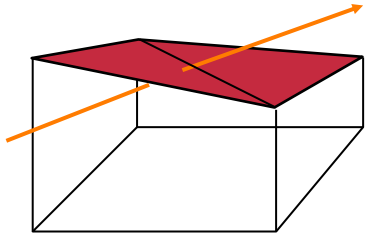
3. Strahl testen gegen das Flächenstück, das von den 4 Höhenwerten an den Ecken aufgespannt wird

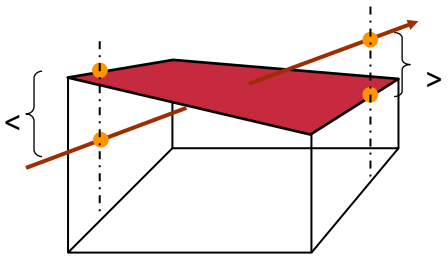


Schnitttest Strahl—Flächenstück in der Zelle

- Naive Methoden:
  - "Nearest-Neighbor":
    - Bestimme mittlere Höhe aus den 4 Höhenwerten an den Ecken
    - Schneide Strahl gegen horizontales Quadrat mit dieser mittleren Höhe
    - Sehr ungenau
  - "2 Dreiecke":
    - Konstruiere 2 Dreiecke aus den 4 Punkten über den Ecken
    - Knick innerhalb der Zelle, Aufteilung in Dreiecke nicht eindeutig
- Besser: "bilineare Interpolation"
  - Betrachte Fläche als parabolisches Hyberboloid
  - Bestimme Höhe am Rand über/unter dem Strahl durch lineare Interpolation
  - Vergleiche Vorzeichen
  - Bestimmt ggf. Schnittpunkt & Normale



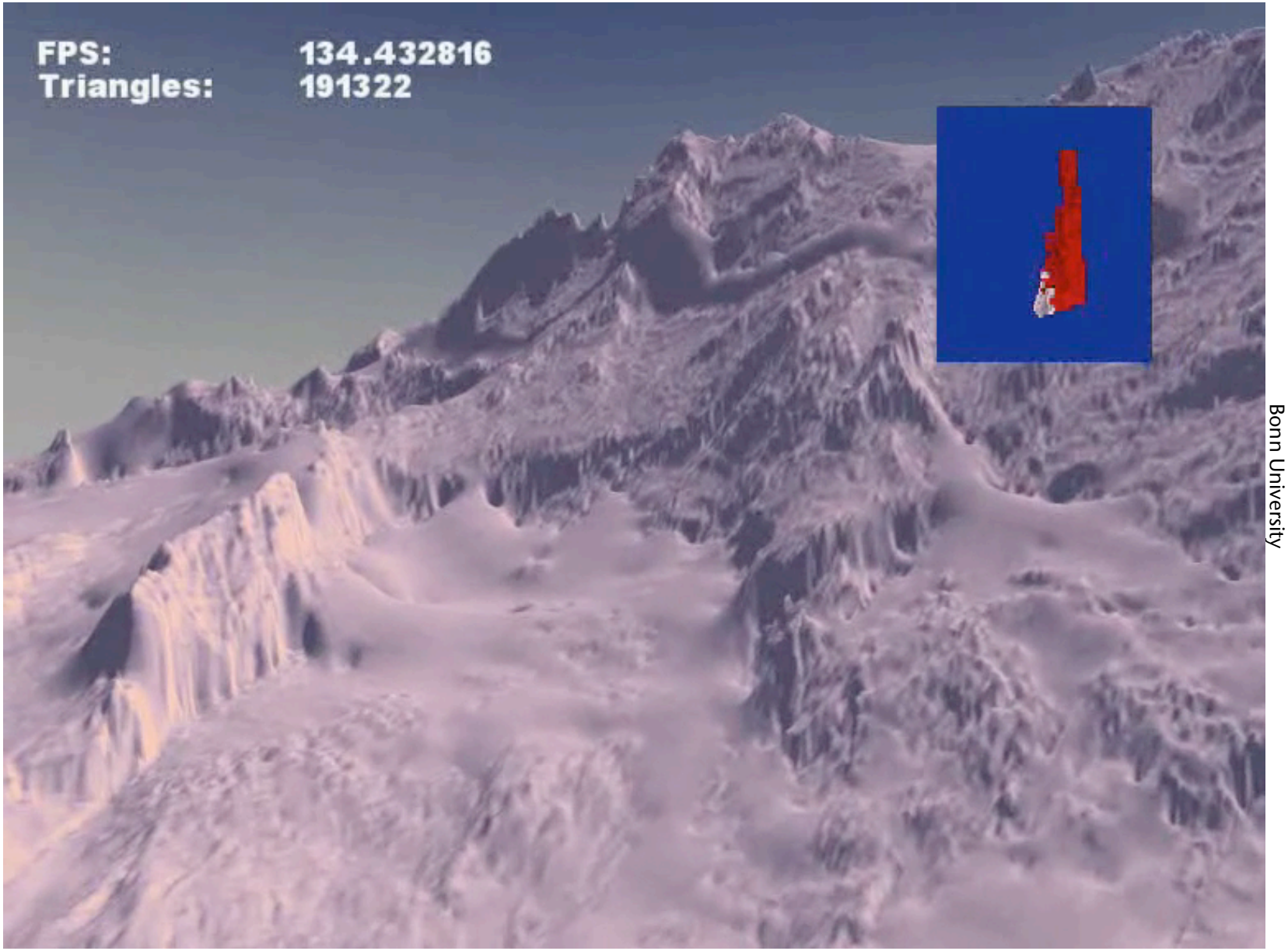




Das Prinzip "3 Punkte liegen immer in einer Ebene" in der Architektur

Aus der Sendung "Einstein" vom 25.10. 2012 des Schweizer Fernsehens SF

Beispiele für Terrain



Bonn University

Valles Marineris, Mars - http://mars.jpl.nasa.gov

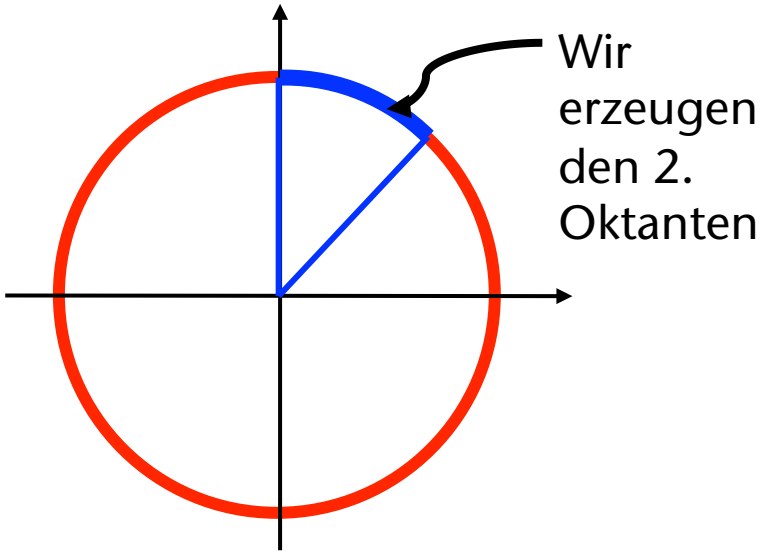
Scan-Konvertierung von Kreisen

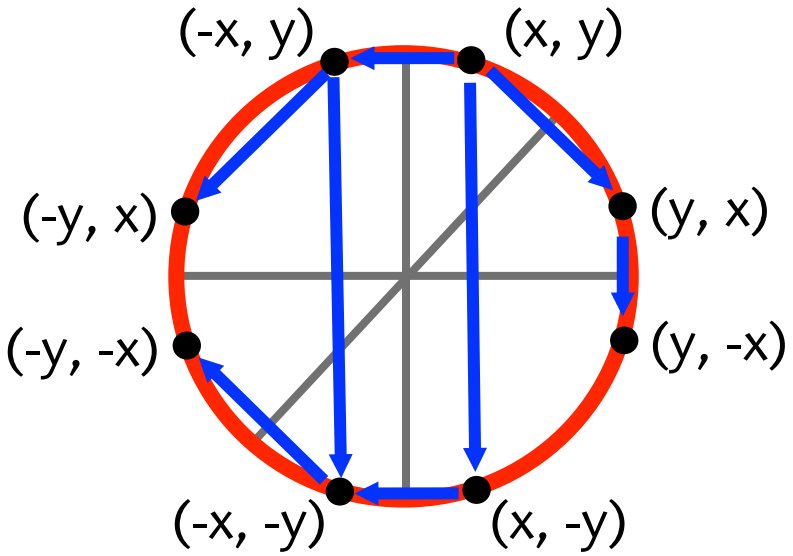
Nutze 8-Punkt-Symmetrie aus

- Berechne nur 1/8 eines Kreises mit $0 \leq x \leq \frac{r}{\sqrt{2}}$

```
drawCirclePoint(x,y):
    drawPixel(x,y)
    drawPixel(y,x)
    drawPixel(y,-x)
    :
    :
```

- Außerdem: oBdA ist Mittelpunkt = Ursprung





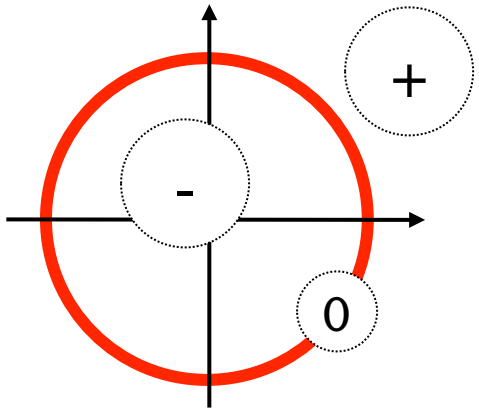
Implizite Kreisgleichungen

- Definiere $F(x, y) = x^2 + y^2 - r^2$

  Für (x,y) auf dem Kreis: F(x,y) = 0

  falls F(x,y) > 0 $\Rightarrow$ (x,y) außerhalb

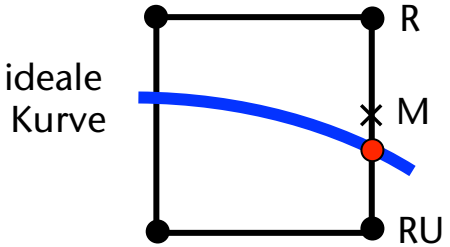
  und F(x,y) < 0 $\Rightarrow$ (x,y) innerhalb

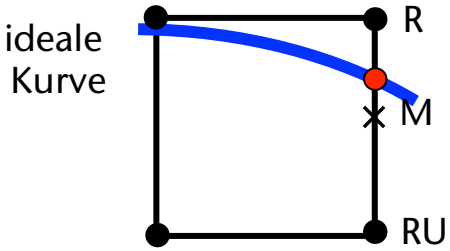


- In jedem x-Schritt: wähle R oder RU

  also: *F*(M) ≥ 0 $\Rightarrow$ RU

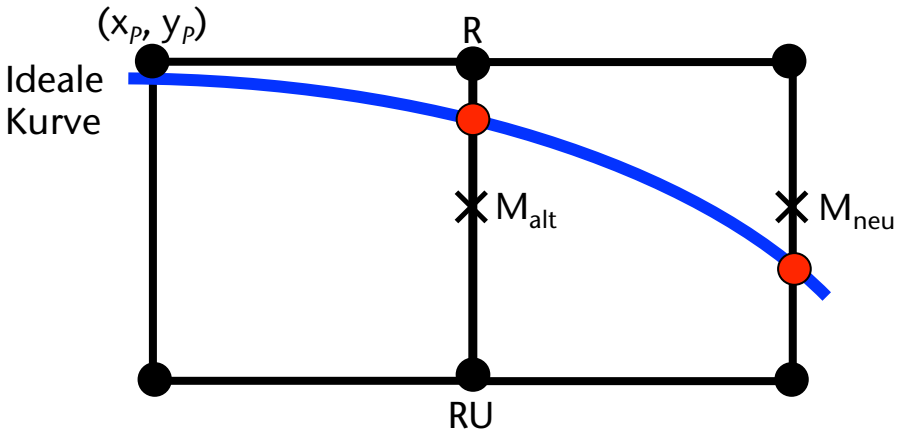
  und: *F*(M) < 0 $\Rightarrow$ R





- Definiere wieder eine Entscheidungsvariable $d = F(M)$

1. Fall: $d_{alt} < 0 \rightarrow$ R



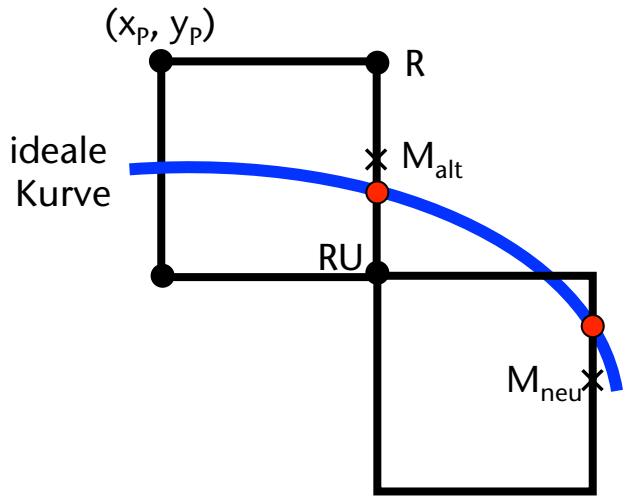
$$d_{alt} = F(x_P + 1, y_P - \tfrac{1}{2}) = (x_P + 1)^2 + (y_P - \tfrac{1}{2})^2 - r^2$$

$$d_{neu} = F(x_P + 2, y_P - \tfrac{1}{2}) = (x_P + 2)^2 + (y_P - \tfrac{1}{2})^2 - r^2$$

$$d_{neu} = d_{alt} + (2x_P + 3)$$

$$d_{\text{neu}} = d_{\text{alt}} + \Delta_R, \quad \text{mit } \Delta_R = 2x_P + 3$$

2. Fall: $d_{alt} \geq 0 \rightarrow$ RU



$$d_{neu} = F(x_P + 2, y_P - \tfrac{3}{2}) = (x_P + 2)^2 + (y_P - \tfrac{3}{2})^2 - r^2$$

$$d_{neu} = d_{alt} + (2x_P - 2y_P + 5)$$

$$d_{\text{neu}} = d_{\text{alt}} + \Delta_{RU}, \quad \text{mit } \Delta_{RU} = 2x_P - 2y_P + 5$$

- Kleines Problem: Δ_{RU} und Δ_R hängen von x_P und y_P ab!
- Idee: bilde inkrementell Differenzen 2-ter Ordnung
- Aktualisiere in beiden Fällen jeweils Δ_{RU} und Δ_R :

Fall R	Fall RU
$\Delta_R(x,y) = 2x+3$	$\Delta_R(x,y) = 2x+3$
$\Delta_R(x+1,y) = 2(x+1)+3$	$\Delta_R(x+1,y-1) = 2(x+1)+3$
$= \Delta_R(x,y)+2$	$= \Delta_R(x,y)+2$
$\Delta_{RU}(x,y) = 2x-2y+5$	$\Delta_{RU}(x,y) = 2x-2y+5$
$\Delta_{RU}(x+1,y) = 2(x+1)-2y+5$	$\Delta_{RU}(x+1,y-1) = 2(x+1)-2(y-1)+5$
$= \Delta_{RU}(x,y)+2$	$= \Delta_{RU}(x,y)+4$


CG
VR


CG
VR