Bremen

CG VR

Computer-Graphik I
Transformationen & Viewing

$$\begin{bmatrix} \cos 90^\circ & \sin 90^\circ \\ -\sin 90^\circ & \cos 90^\circ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_2 & -a_1 \end{bmatrix}$$

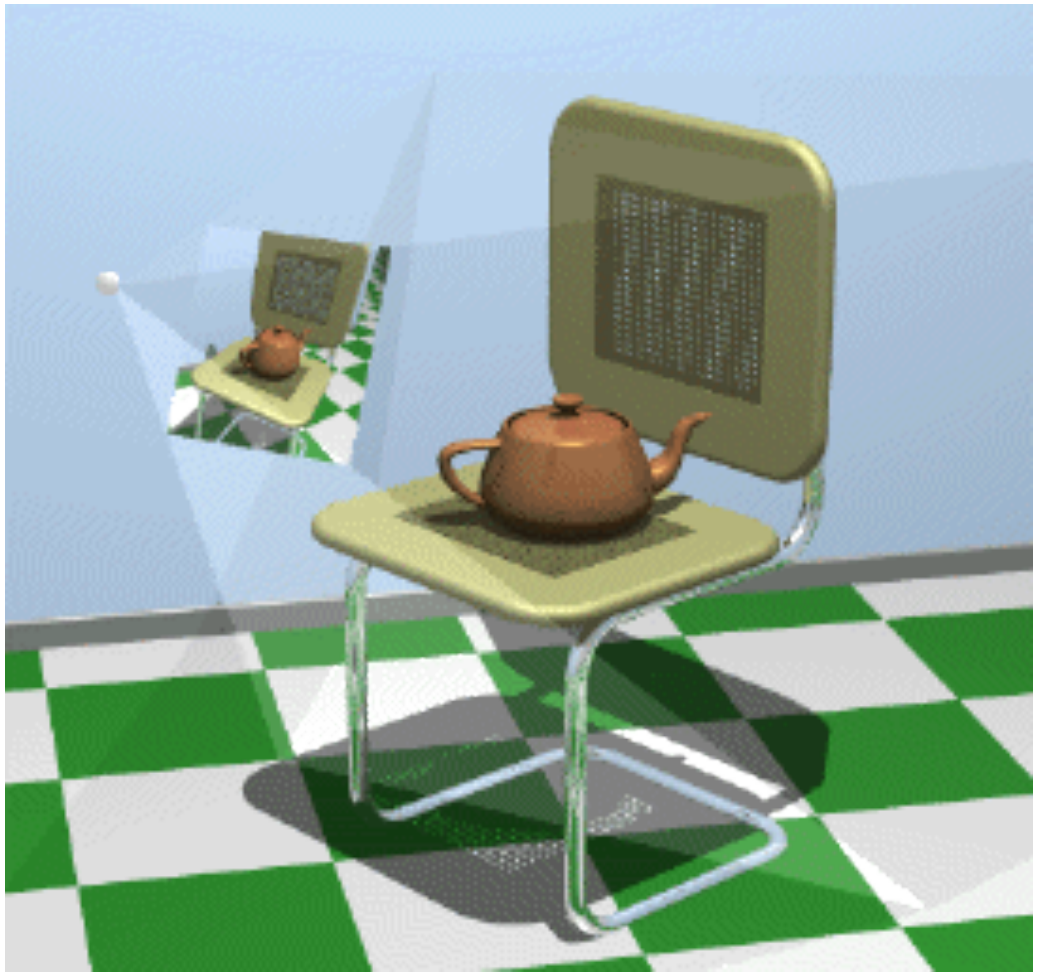
G. Zachmann

University of Bremen, Germany

cgvr.informatik.uni-bremen.de

Motivation

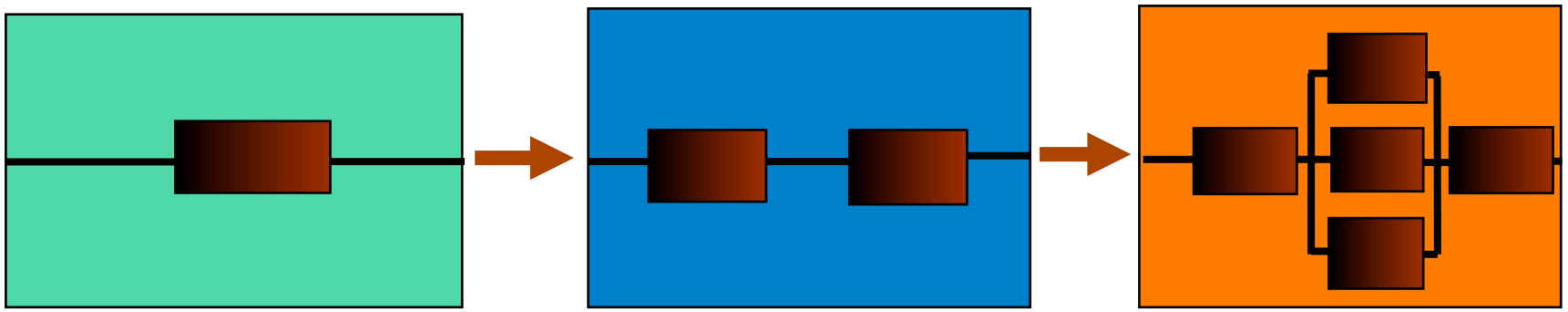
- Man möchte die virtuelle 3D Welt auf einem 2D Display darstellen



Motivation

- Transformationen werden benötigt, um ...
  - Objekte, Beleuchtung und Kamera zu positionieren und animieren;
  - alle Berechnungen im selben Koordinatensystem durchzuführen;
  - Objekte zu projizieren.
- Teilaspekt: Viewing-Transformation = welche Transformationen muß man verwenden, um die 3D-Welt auf den 2D-Bildschirm zu projizieren
- OpenGL verwendet 4x4-Matrizen zur Spezifikation von Transormationen (warum?)

Die Graphik-Pipeline (stark vereinfacht)



Anwendung

Geometrie-Stufe

Alle Berechnungen, die 1x pro Polygon oder pro Vertex (Ecke) durchgeführt werden
Z.B.:
- Modell- und Viewing-Transformation
- Projektion
- Beleuchtung
- Clipping

Arbeitet im 3D

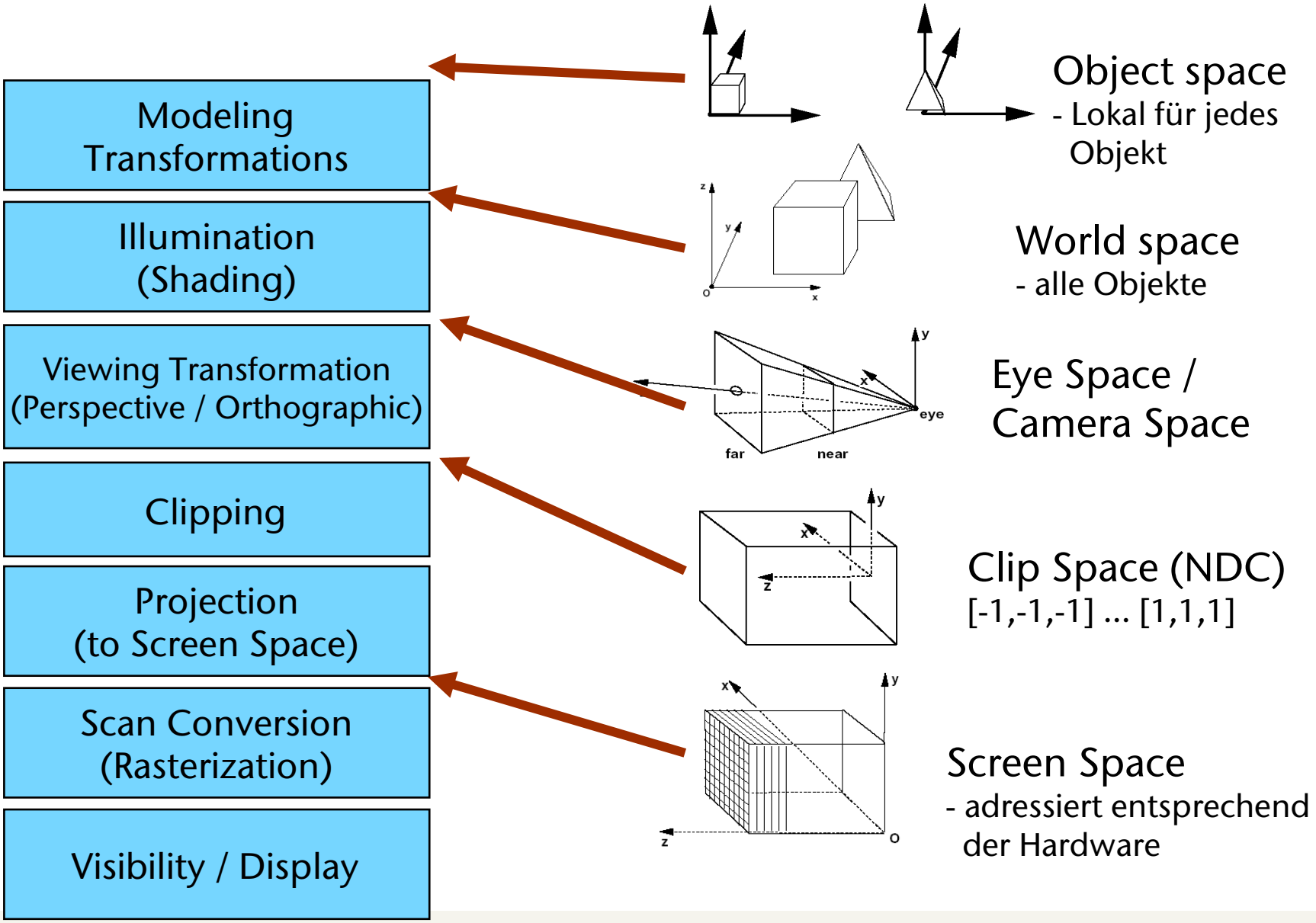
Im folgenden diese Tasks

Raster-Stufe

Kennen wir (teilweise) schon
Z.B.:
- Scan Conversion

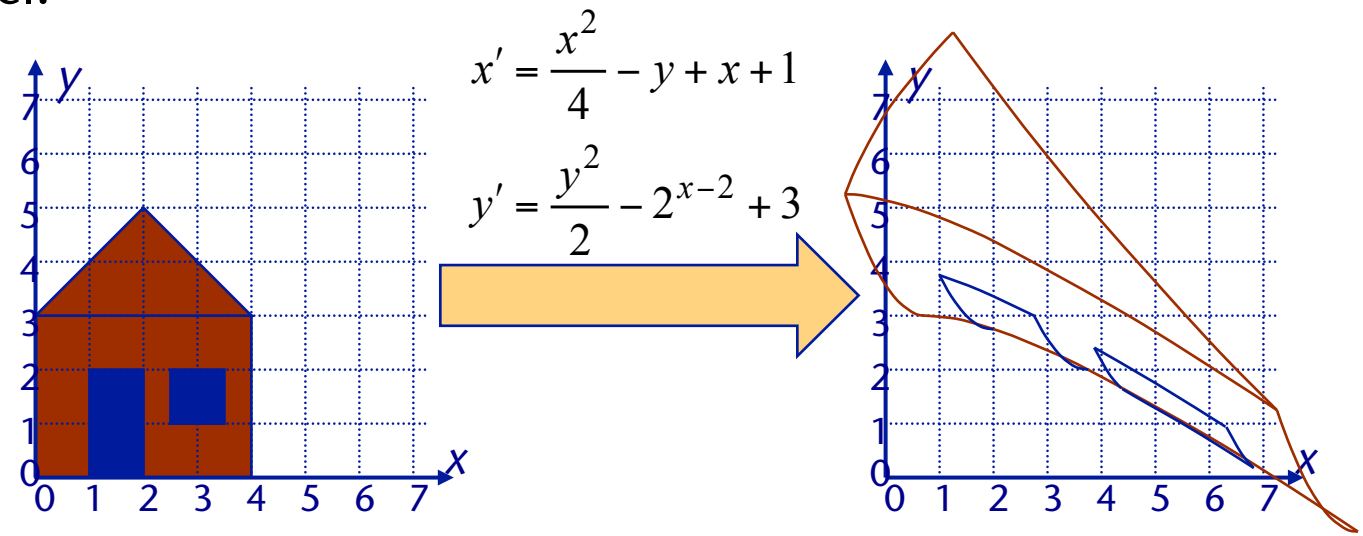
Arbeitet im 2D

Koordinatensysteme in der Pipeline



Allgemeine Transformationen

- Allgemeine Transformation ist evtl. nicht linear → Geraden werden i.A. nicht wieder auf Geraden abgebildet
- Beispiel:



- Folge: jeder Punkt (auf einer Linie, in einem Polygon, ...) muss transformiert werden → nicht effizient, nicht interessant für Echtzeit-Graphik

Lineare und affine Abbildung

- Folge aus Linearität → Geraden werden auf Geraden abgebildet
- Lineare Transformationen (z.B. Rotation, Skalierung und Scherung) können durch eine 3x3 Matrix dargestellt werden:

$$x' = A \cdot (\alpha x + \beta y) = \alpha A \cdot x + \beta A \cdot y$$

- Merke die Konvention:

"Matrix mal Vektor"

- Problem: affine Transformationen (z.B. Translation), können **nicht** alle als 3x3 Matrix dargestellt werden:

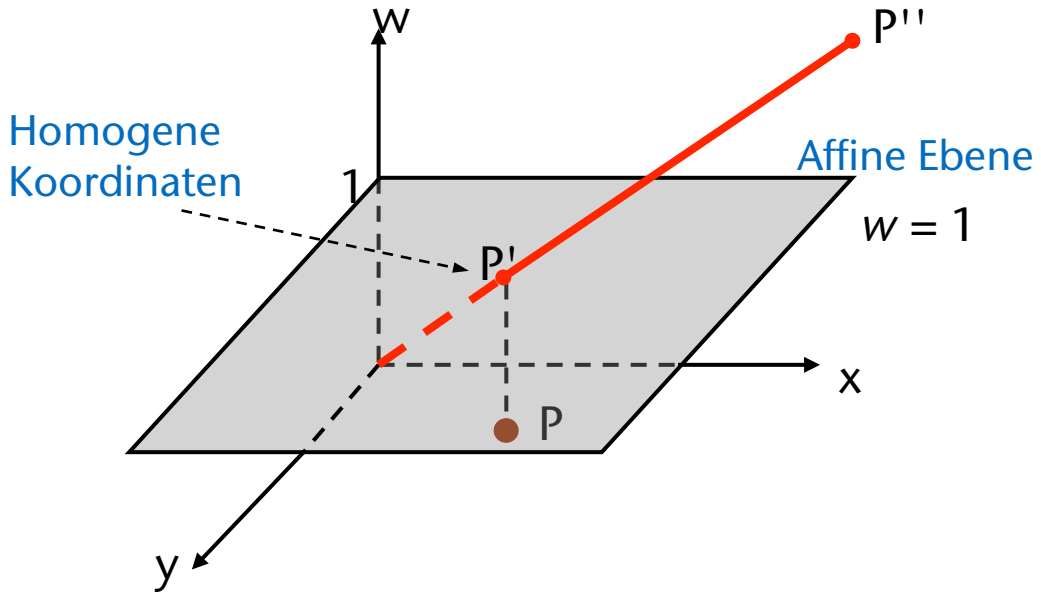
$$X' = A \cdot x + t$$

Homogene Koordinaten im 3D

- Homogene Darstellung ist nützlich für Transformationen von Punkten *und* Vektoren
- "Trick": erweitere 3D Punkte und Vektoren zu 4D Punkten und Vektoren
- Homogener Punkt $P = (p_x, p_y, p_z, p_w) \quad p_w = 1$
- Homogener Vektor $\mathbf{p} = (p_x, p_y, p_z, p_w) \quad p_w = 0$

Veranschaulichung im 2D

- Erweitere Punkt P = (*x*,*y*) zu P' = (*x*,*y*,1)
- Assoziiere Linie *w*·(*x*,*y*,1) = (*wx*, *wy*, *w*) mit P'



- M.a.W.: ein 3D-Vektor (*x*, *y*, *w*) beschreibt ...
  - ... den 2D-Punkt (*x*/*w*, *y*/*w*) für *w* ≠ 0
  - ... den 2D-Vektor (*x*, *y*) für *w* = 0

Homogenisierung im 3D

- Der homogene Punkt

$$P = (x, y, z, w) \quad w \neq 0$$

beschreibt den Punkt an der Stelle

$$P = \left(\frac{x}{w}, \frac{y}{w}, \frac{z}{w}\right)$$

Addition von Punkten und Vektoren in homogenen Koord.

- Punkt + Vektor = Punkt

$$\begin{pmatrix} p_x \\ p_y \\ p_z \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_x + v_x \\ p_y + v_y \\ p_z + v_z \\ 1 \end{pmatrix}$$

- Vektor + Vektor = Vektor

$$\begin{pmatrix} u_x \\ u_y \\ u_z \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_x + v_x \\ u_y + v_y \\ u_z + v_z \\ 0 \end{pmatrix}$$

- Punkt – Punkt = Vektor

$$\begin{pmatrix} p_x \\ p_y \\ p_z \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} q_x \\ q_y \\ q_z \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_x - q_x \\ p_y - q_y \\ p_z - q_z \\ 0 \end{pmatrix}$$

Homogene Matrizen für Transformationen in 3D

- Matrix

$$M = \begin{pmatrix} m_{00} & m_{01} & m_{02} \\ m_{10} & m_{11} & m_{12} \\ m_{20} & m_{21} & m_{22} \end{pmatrix}$$

- Homogene Form:

$$M_{4x4} = \begin{pmatrix} m_{00} & m_{01} & m_{02} & 0 \\ m_{10} & m_{11} & m_{12} & 0 \\ m_{20} & m_{21} & m_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Lineare Abb. (Matrix-Vektor-Multiplikation)

- 3x3-Form:

$$M \cdot \mathbf{v} = \begin{pmatrix} m_{00} & m_{01} & m_{02} \\ m_{10} & m_{11} & m_{12} \\ m_{20} & m_{21} & m_{22} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{pmatrix}$$

- Homogene Form:

$$M_{4x4} \cdot \mathbf{v}' = \begin{pmatrix} m_{00} & m_{01} & m_{02} & 0 \\ m_{10} & m_{11} & m_{12} & 0 \\ m_{20} & m_{21} & m_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \\ 0 \end{pmatrix}$$

Affine Abbildungen im 3D

- 3x3-Form:

$$M \cdot \mathbf{p} + t = \begin{pmatrix} m_{00} & m_{01} & m_{02} \\ m_{10} & m_{11} & m_{12} \\ m_{20} & m_{21} & m_{22} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} p_x \\ p_y \\ p_z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} t_x \\ t_y \\ t_z \end{pmatrix}$$

- Homogene Form:

$$M_{4x4} \cdot \mathbf{p}_4 = \begin{pmatrix} m_{00} & m_{01} & m_{02} & t_x \\ m_{10} & m_{11} & m_{12} & t_y \\ m_{20} & m_{21} & m_{22} & t_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} p_x \\ p_y \\ p_z \\ 1 \end{pmatrix}$$

➢ In homogenen Koordinaten lassen sich sogar affine Abbildungen als einfache Matrix-Vektor-Multiplikation darstellen!

Grundtransformationen im 3D

- Translation
- Rotation
- Skalierung
- Scherung (kommt in der Praxis fast nie vor)

- Verkettung (*concatenation*)
- Starrkörpertransformation (*rigid body transformation*)

Translation

- Eines Punktes

$$T_t \cdot P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & t_x \\ 0 & 1 & 0 & t_y \\ 0 & 0 & 1 & t_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} p_x \\ p_y \\ p_z \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_x + t_x \\ p_y + t_y \\ p_z + t_z \\ 1 \end{pmatrix}$$

- Eines Vektors

$$T_t \cdot \mathbf{v} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & t_x \\ 0 & 1 & 0 & t_y \\ 0 & 0 & 1 & t_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \\ 0 \end{pmatrix}$$

- Inverse:

$$(T_t)^{-1} = T_{-t}$$

Rotation

- Rotation um x-, y-, z-Achse um Winkel ϕ

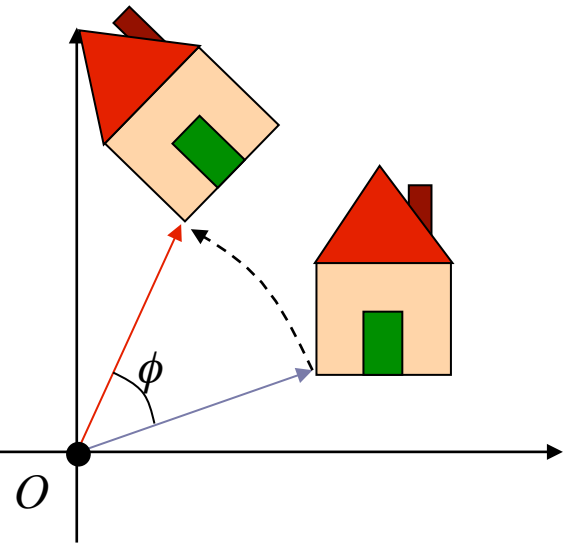
$$R_x(\phi) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & ?\cos\phi & ?\sin\phi & 0 \\ 0 & ?\sin\phi & ?\cos\phi & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

X-Koord. bleibt unverändert

Vorzeichentest: ϕ=90 →
y geht nach z, z geht nach -y.

$$R_y(\phi) = \begin{pmatrix} \cos\phi & 0 & \sin\phi & 0 \\ 0 & 1 & & 0 \\ -\sin\phi & 0 & \cos\phi & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$R_z(\phi) = \begin{pmatrix} \cos\phi & -\sin\phi & 0 & 0 \\ \sin\phi & \cos\phi & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$



Orthogonale Matrizen

- Definition (Wdhg aus Mathe): eine Matrix R heißt orthogonal ⇔

$$RR^T = R^T R = I$$

- Charakterisierung:

  R ist orthogonal ⇔ R ist Rotationsmatrix und/oder Spiegelung

- Folgen:

  $\det(R) = \pm 1$

  $R^{-1} = R^{\mathrm{T}}$

  R^{T} ist orthogonal

  $\|Rv\| = \|v\|$ (Längenerhaltung)

  $(Ru)\cdot(Rv) = u\cdot v$ (Winkelerhaltung)

  R_1, R_2 sind orthogonal $\Rightarrow$ $R_1 R_2$ ist orthogonal

  Die Spalten von R sind zueinander *orthonormal* (nicht nur orthogonal!)

Skalierung

- Kann zum Vergrößern oder Verkleinern verwendet werden:

$$S(s_x, s_y, s_z) = \begin{pmatrix} s_x & 0 & 0 & 0 \\ 0 & s_y & 0 & 0 \\ 0 & 0 & s_z & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

- s_x, s_y, s_z beschreiben Längenänderung in x-, y-, z-Richtung
  → nicht-uniforme (anisotrope)
- Uniforme (isotrope) Skalierung: $s_x = s_y = s_z$
- Inverse:

$$S^{-1}(s_x, s_y, s_z) = S\left(\frac{1}{s_x}, \frac{1}{s_y}, \frac{1}{s_z}\right)$$

- Ein alternative Skalierungs-Matrix:

$$S(s,s,s) = \begin{pmatrix} s & 0 & 0 & 0 \\ 0 & s & 0 & 0 \\ 0 & 0 & s & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cong \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{s} \end{pmatrix}$$

- Aber besser die "normale" Skalierungsmatrix verwenden

Scherung (*Shearing*)

- Verschiebt z.B. die *x*-Koordinate abhängig von der Entfernung zur Ebene *z*=0 (d.h., der *xy*-Ebene), also abhängig von der z-Koord.
- Zum Beispiel: $H_{xz}(s)$ schert den *x*-Wert gemäß dem *z*-Wert

$$H_{xz}(s)\cdot\mathbf{p} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & s & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} p_x \\ p_y \\ p_z \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_x + sp_z \\ p_y \\ p_z \\ 1 \end{pmatrix}$$

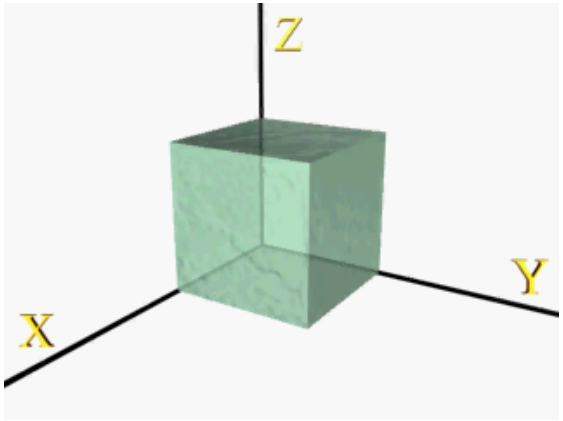
- Inverse:

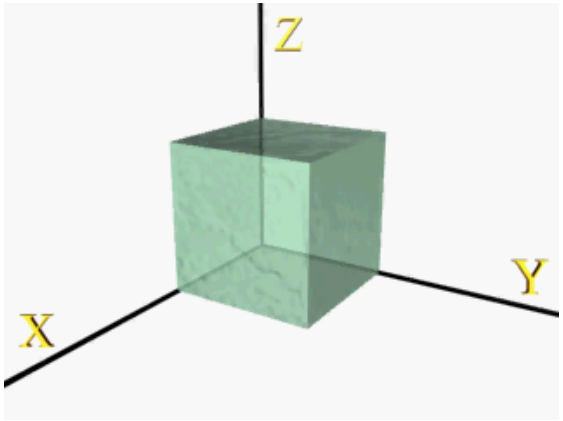
$$H_{xz}^{-1}(s) = H_{xz}(-s)$$

- Achtung: Determinante = 1 → Volumen bleibt erhalten
  - Aber Winkel werden hier nicht erhalten!

Movies

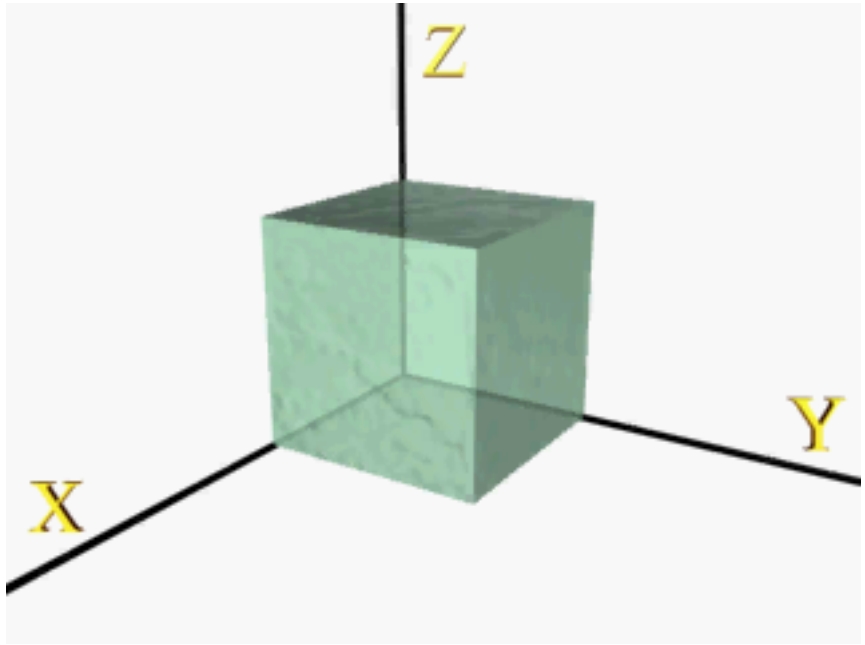
H_{xy} = X mit Y





H_{xz} = X mit Z

$$H_{xz}(s) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & s & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$



H_{xz} dann H_{zy}

Spiegelung

- Spiegelung entlang der x-Achse, m.a.W., Spiegelung bzgl. der yz-Ebene:

$$M_x = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

  - Analog die anderen beiden Spiegelungen
- Achtung:

$$\det(M_x) < 0 \quad !$$

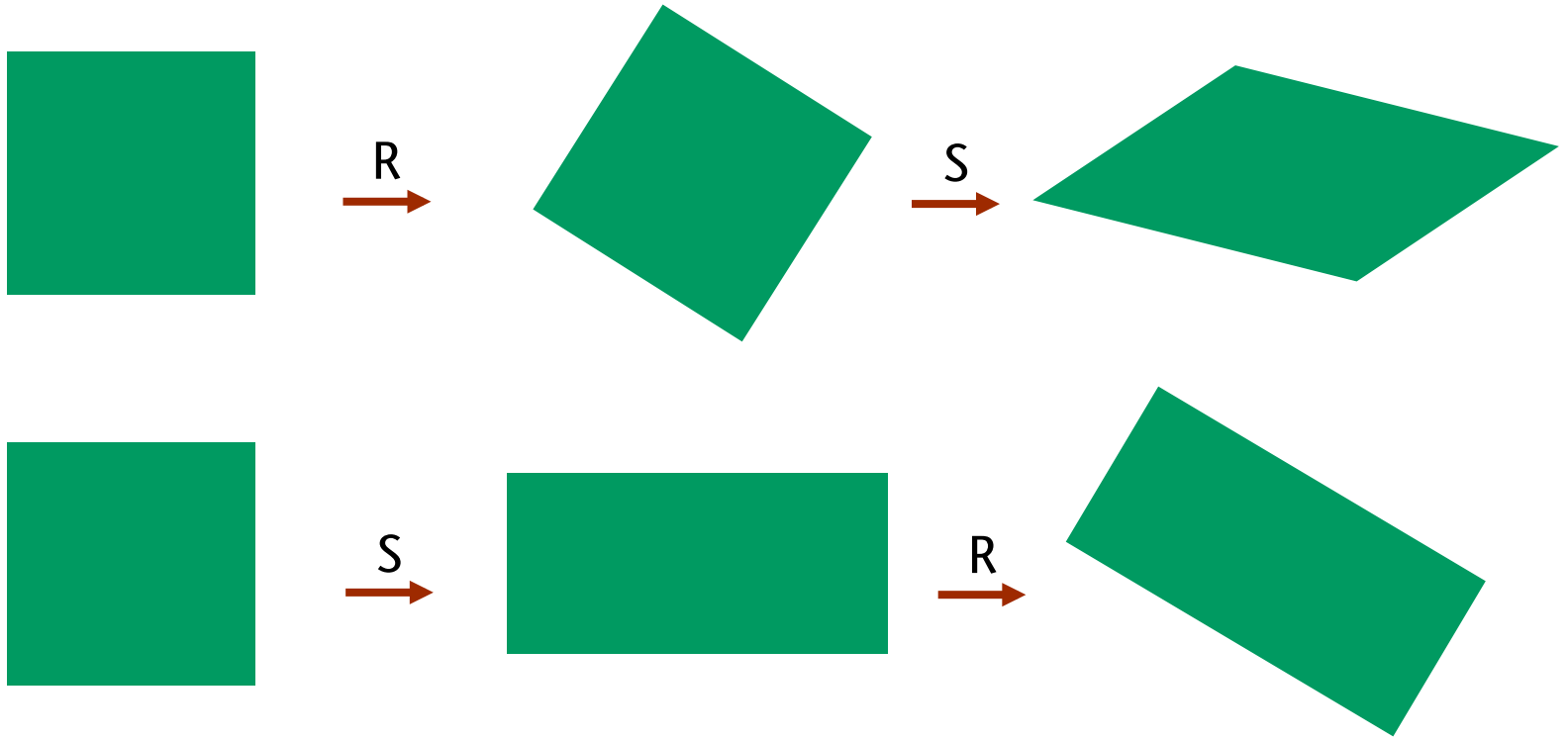
  - Bei allen anderen Transformationen T bisher war

$$\det(T) > 0$$

- Spiegelungen sind in der CG eigtl. immer ausgeschlossen
  - U.a., weil der Umlaufsinn der Polygone umgedreht wird

Verknüpfung / *Concatenation*

- Nützlich zur Steigerung der Effizienz
- Achtung: Multiplikation von Matrizen ist nicht kommutativ → Reihenfolge der Transformation spielt eine Rolle!
- Beispiel:

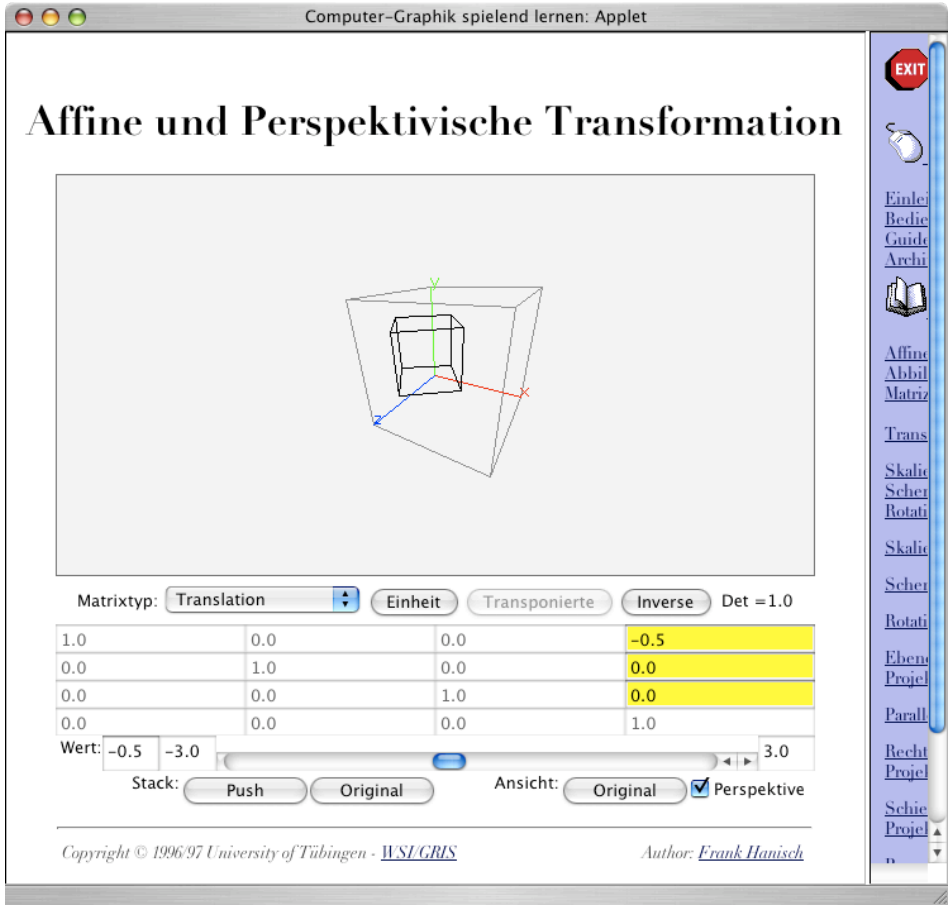


- Reihenfolge in einer Matrixkette:

$$p' = M_n \cdot \ldots \cdot M_2 \cdot M_1 \cdot p$$

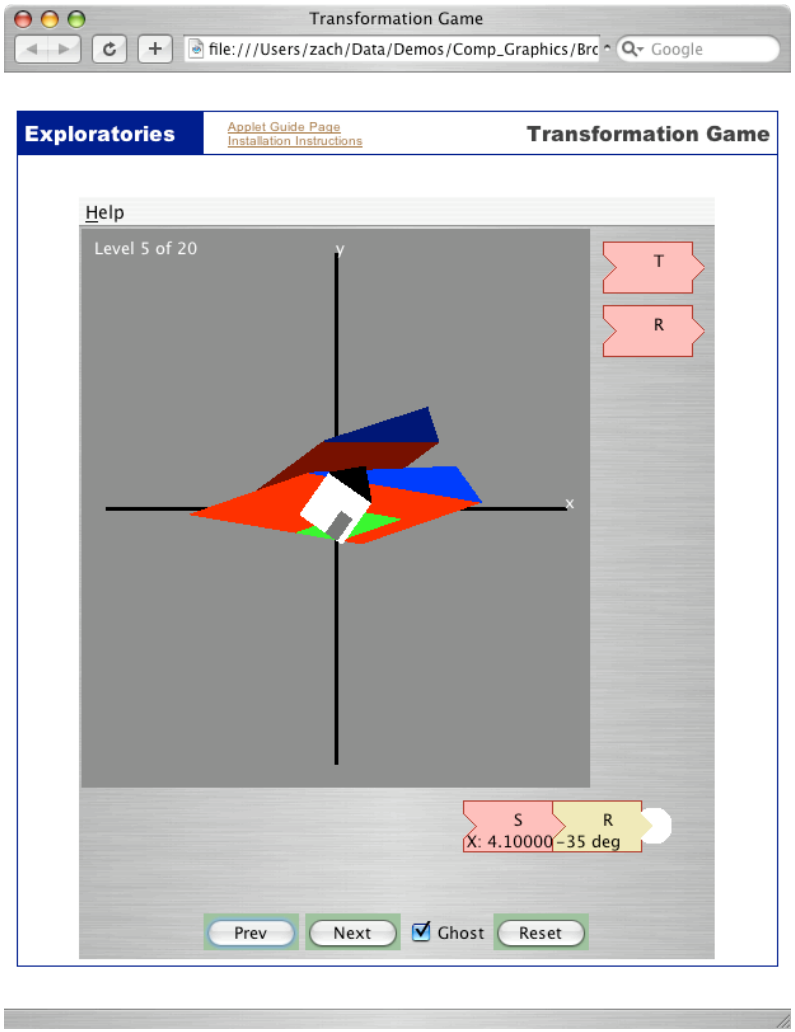
Reihenfolge der Ausführung

Demo zur Konkatenation von Transformationen



Quelle: http://www.gris.uni-tuebingen.de/gris/GDV/java/doc/html/etc/AppletIndex.html

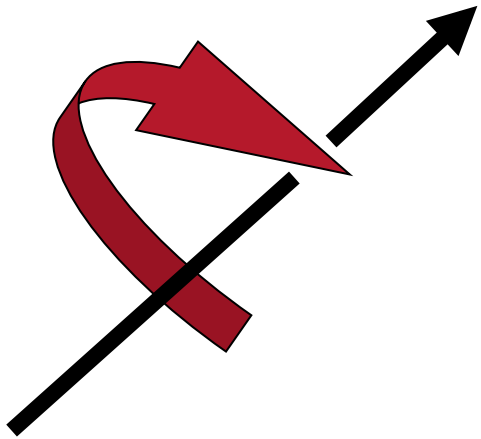
Und noch eine ...



http://www.cs.brown.edu/exploratories → *Transformation Game*

Wieviele Freiheitsgrade haben Rotationen?

- Antwort: 3 DOFs (*degrees of freedom*)
  - 2 DOFs für die Achse + 1 DOF für den Winkel; oder
  - 3 Euler-Winkel

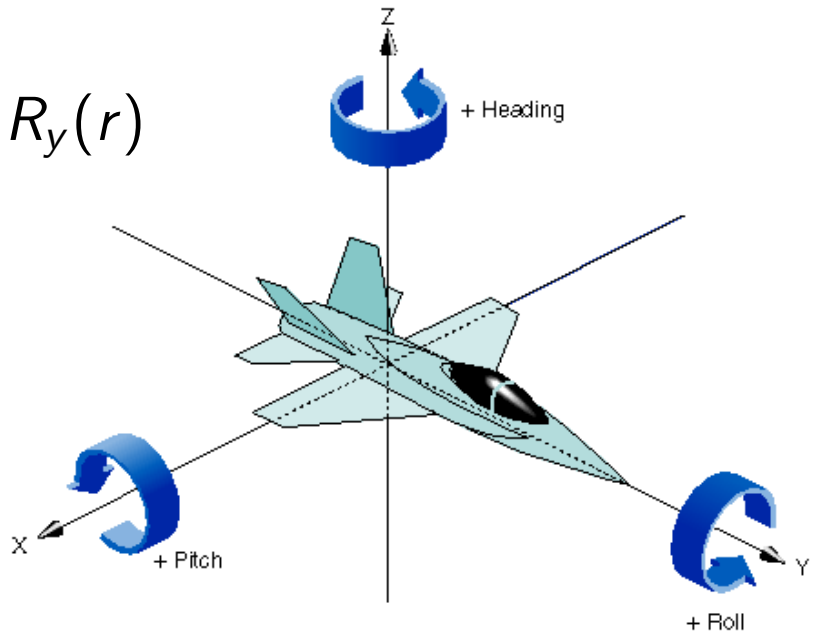


Die Euler-Winkel

- Euler's Rotations-Satz:
  Jede Rotation kann mit Hilfe 3-er Winkel um (fast) beliebige Achsen zusammengesetzt werden.
- Diese Winkel heißen Euler-Winkel und bezeichnen meistens Rotationen um eine der drei Welt-Koordinaten-Achsen
- Häufige Variante im Maschinenbau:

$$R(r,p,y) = R_z(y)R_x(p)R_y(r)$$

- Bezeichnung oft:
  roll, pitch, yaw (Schiff)
  roll, pitch, heading (Flugzeug)

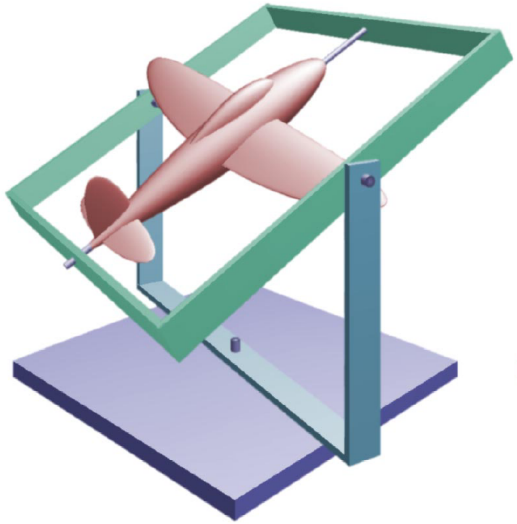


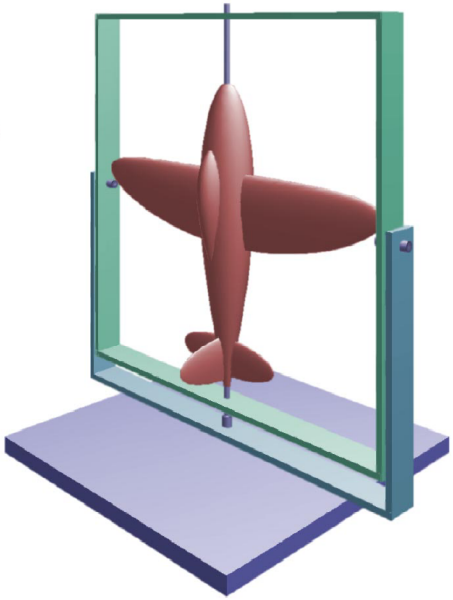
Nachteile

- Erscheint zunächst sehr natürlich (3 DOFs → 3 Winkel)
- Achtung: die Spezifikation einer Rotation mittels Euler-Winkeln macht viele Probleme!!!!!!!!!
  - Reihenfolge der Rotationen ist nicht festgelegt!
    - Oft *"roll, pitch, yaw"* — aber Zuordnung zu den Achsen nicht definiert!
    - Manchmal auch: z, x, z ! Oder ...
  - Gimbal Lock
  - Werte-Bereiche: für einen der Winkel ist der Bereich nur [-90, +90]
    - Das kann auch gar nicht anders sein
  - Rechnen (z.B. interpolieren oder mitteln) ist unmöglich

Der *Gimbal Lock*

- Tritt immer dann ein, wenn 2 Achsen (fast) gleich sind
- Folge: immer noch 3 Parameter, aber nur 2 Freiheitsgrade!
  - Die Abbildung von Orientierung → Euler-Winkel ist nicht mehr eindeutig
  - Rotation um eine der (lokalen) Flugzeugachsen geht nicht mehr!





Euler Angles in the Real World

- In den Apollo-Raketen wurde ein Kreiselkompass (Trägheitsmessgerät) verwendet
- Kleine Anekdote dazu:

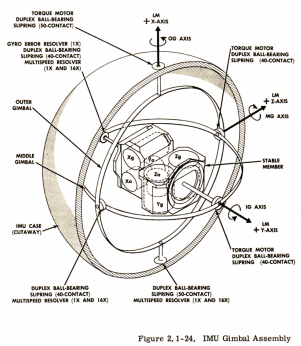


Figure 2.1-24. IMU Gimbal Assembly

About two hours after the Apollo 11 landing, Command Module Pilot Mike Collins had the following conversation with CapCom Owen Garriott:
104:59:35 *Garriott*: Columbia, Houston. We noticed you are maneuvering very close to gimbal lock. I suggest you move back away. Over.
104:59:43 *Collins*: Yeah. I am going around it, doing a CMC Auto maneuver to the Pad values of roll 270, pitch 101, yaw 45.
104:59:52 *Garriott*: Roger, Columbia. (Long Pause)
105:00:30 *Collins*: (Faint, joking) How about sending me a fourth gimbal for Christmas.

- Um Gimbal-Lock zu vermeiden, wurde tatsächlich ein 4-ter Gimbal eingeführt!

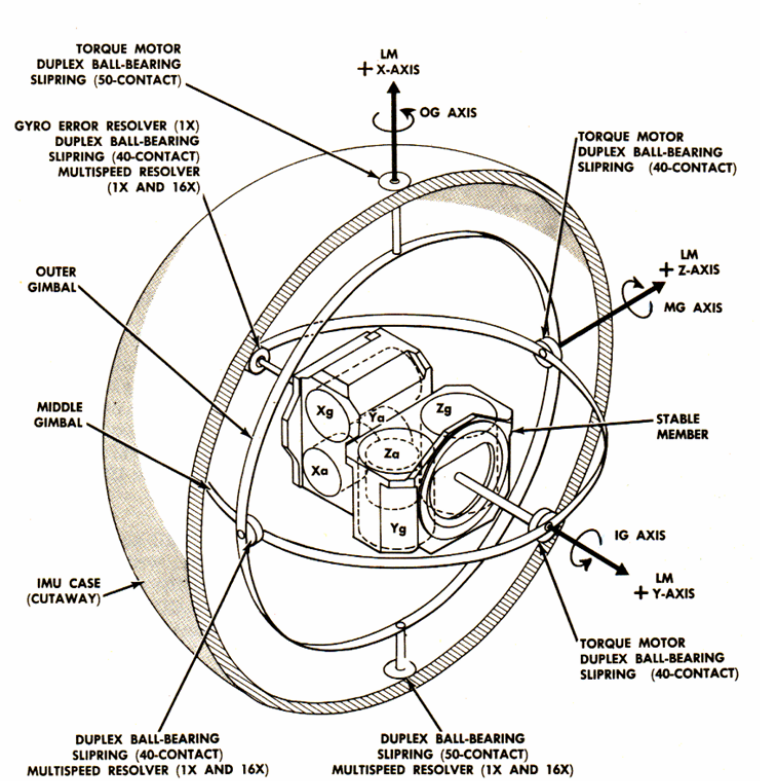
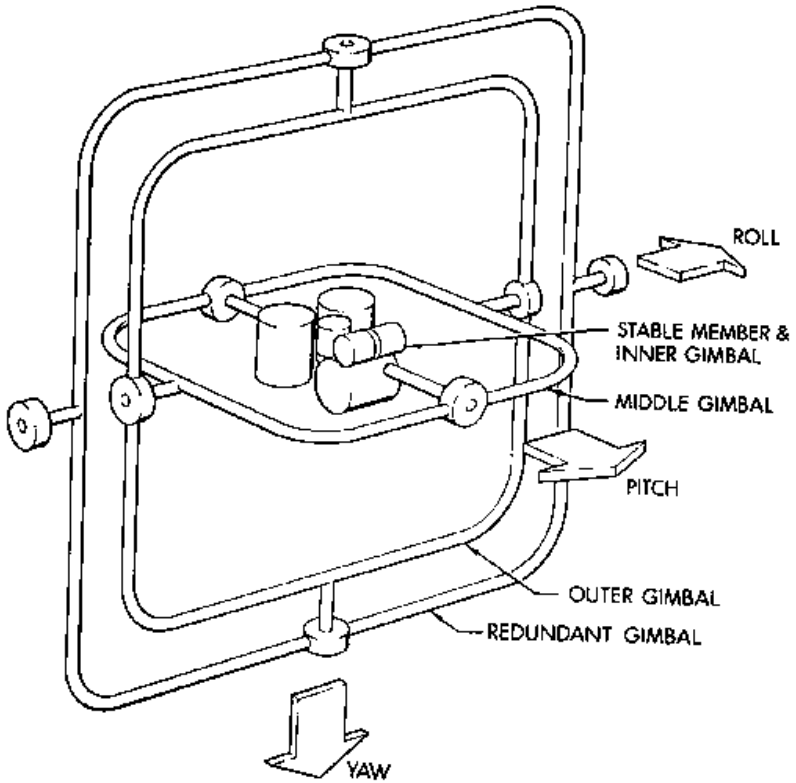
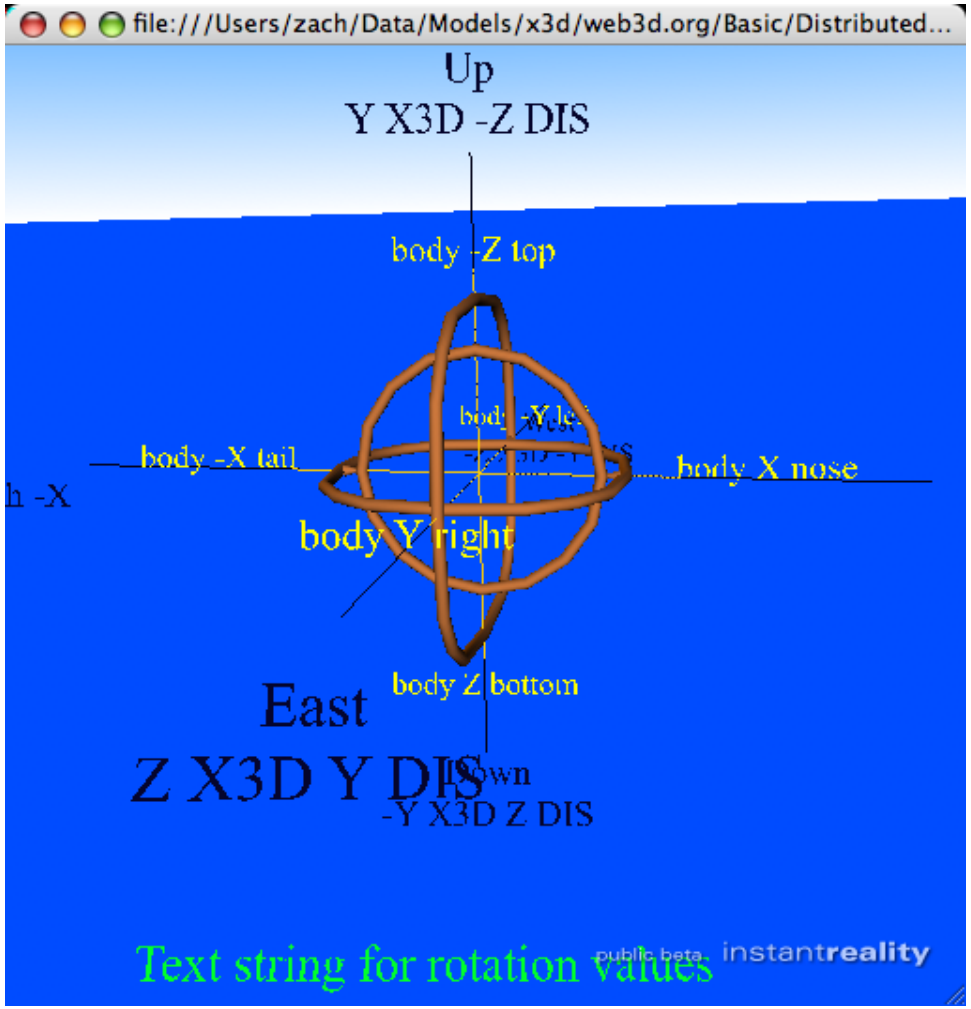


Figure 2.1-24. IMU Gimbal Assembly



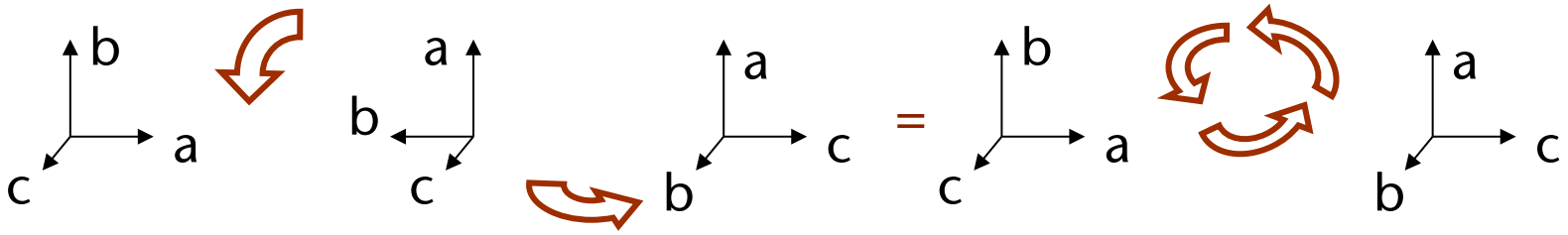
Quelle: http://www.hq.nasa.gov/office/pao/History/alsj/gimbals.html

Interaktive Demo (VRML)

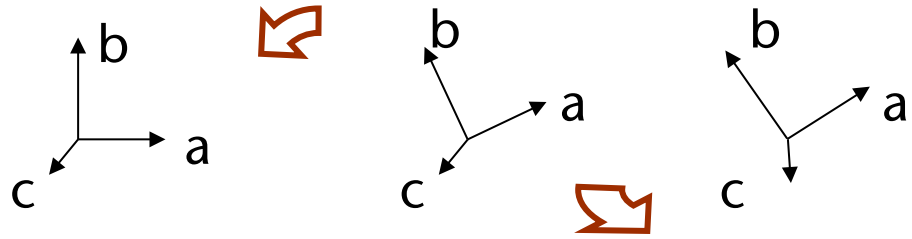


Gimbals.wrl

- Weiteres Problem: Interpolation zwischen zwei Rotationen (Orientierungen) mittels Euler-Winkel klappt nicht
- Beispiel:
  - Rotation von 90° um Z, dann 90° um Y = 120° um (1, 1, 1)



  - Aber: Rotation von 30° um Z, dann 30° um Y ≠ 40° um (1, 1, 1) !



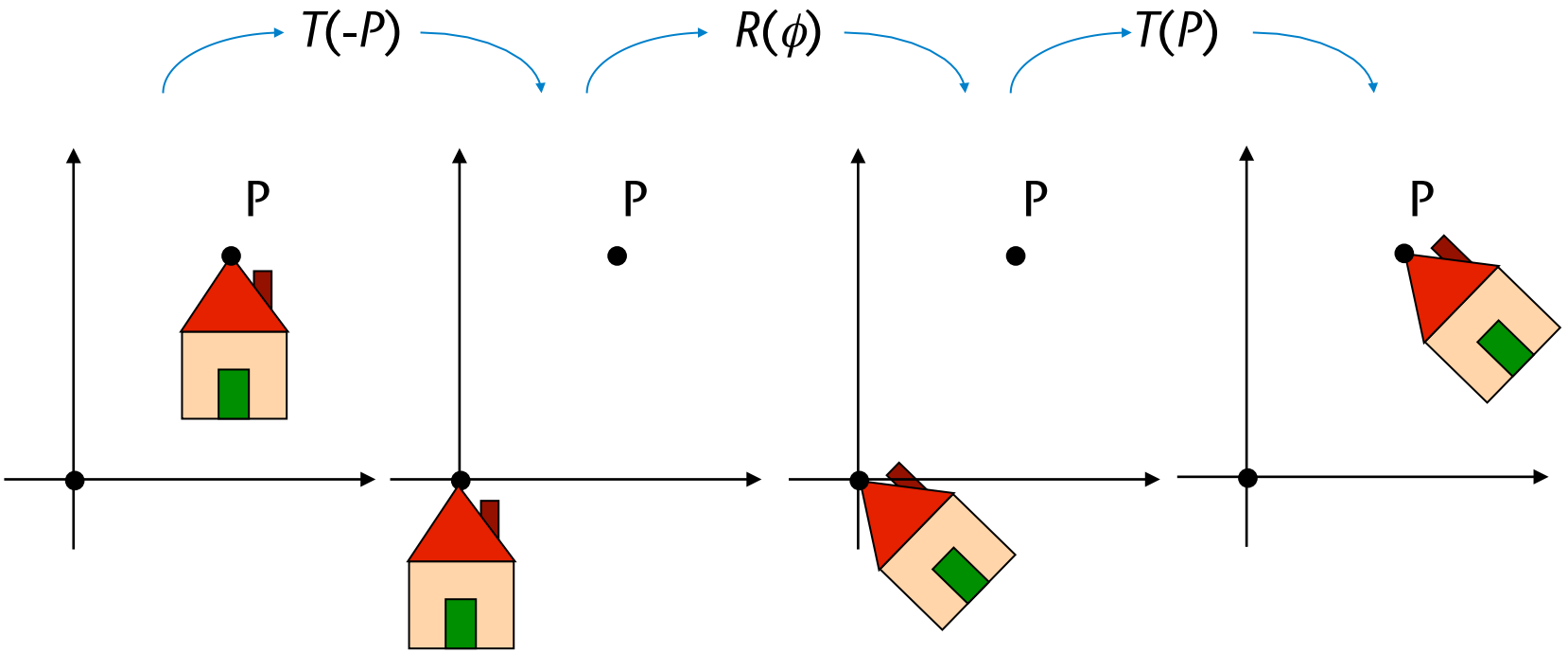
Intermezzo

- Ein Film, in dem viele Interpolationen von Rotationen / Orientierungen vorkommen

http://www.evl.uic.edu/hypercomplex/

Rotation um einen beliebigen Punkt in 2D

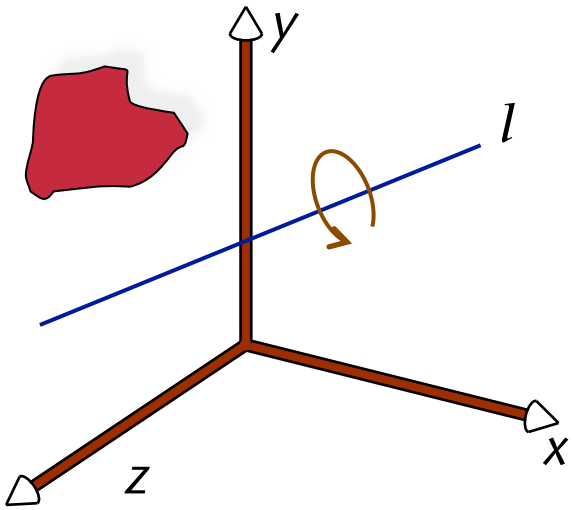
- Gesucht: Rotation mit Winkel ϕ um P



$$M = T_P R_\theta T_{-P}$$

Rotation um eine beliebige Achse in 3D

- Man möchte mit θ um die Gerade l rotieren

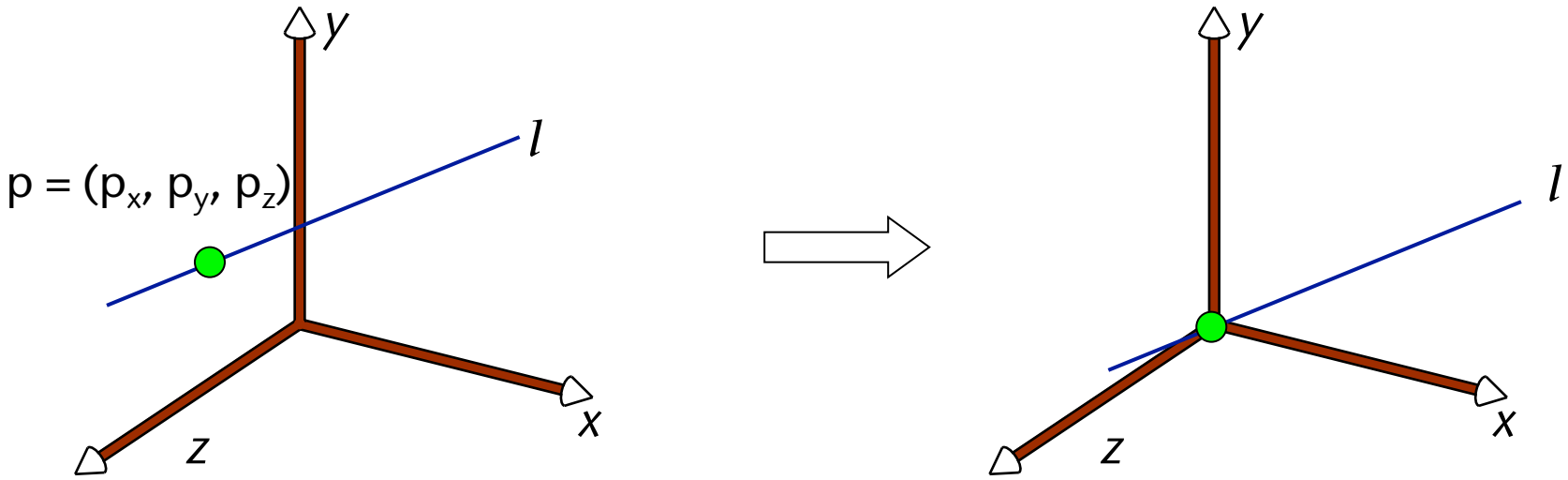


- Gesucht: eine Matrix R, die diese Transformation enthält
- Wir wissen, wie man um eine Koordinatenachse rotiert
- Somit müssen wir die Szene in eine Situation transformieren, mit der wir umgehen können

- Grundidee:
  1. Verschiebe einen Punkt der Geraden in den Ursprung
  2. Rotiere um eine Achse, so daß l in einer Koordinatenebene liegt
  3. Rotiere um eine weiter Achse, so daß l auf einer Koordinatenachse liegt
  4. Rotiere um diese Achse mit θ
  5. Invertierte Rotation um die Koordinatenachse aus Schritt 3
  6. Invertierte Rotation um die Koordinatenachse aus Schritt 2
  7. Invertiere Verschiebung aus Schritt 1, so daß l wieder in Ausgangsposition

Schritt 1

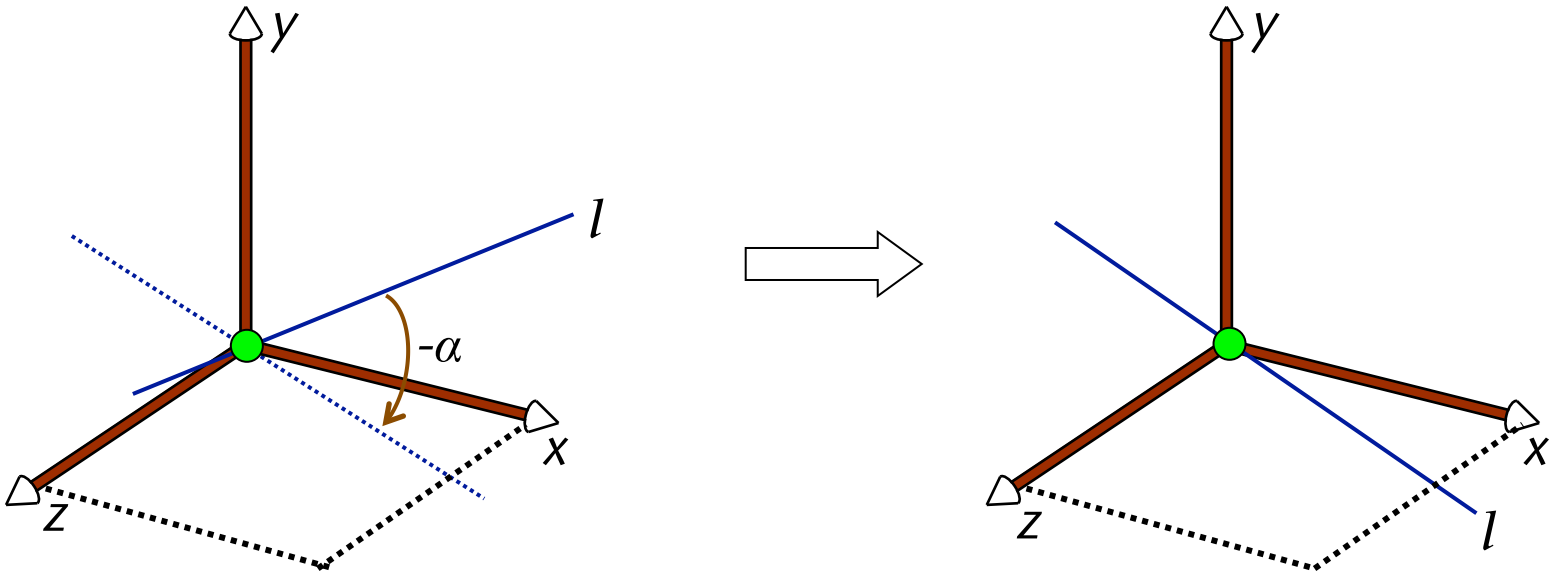
- Verschiebe Gerade, so daß ein Punkt im Ursprung liegt:



$$T_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -p_x \\ 0 & 1 & 0 & -p_y \\ 0 & 0 & 1 & -p_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Schritt 2

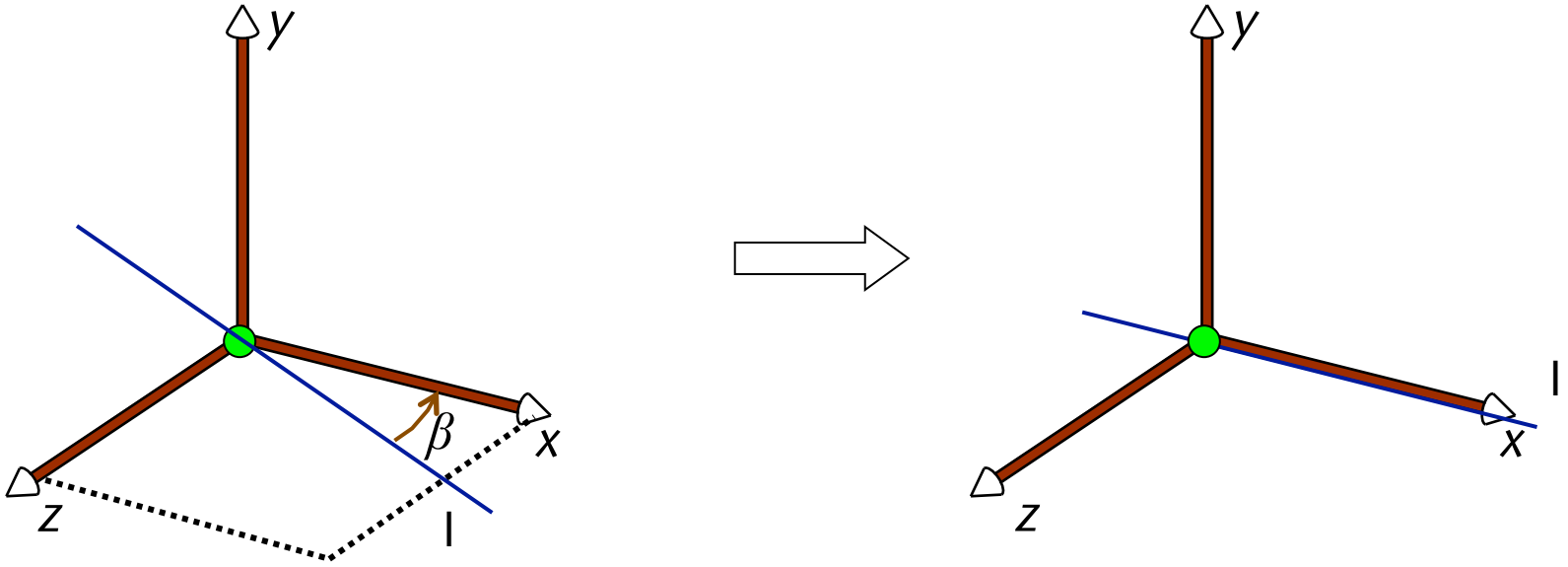
- Rotieren, so daß l in einer Koordinatenebene liegt
- Z.B.: rotiere mit -α um die z-Achse, so daß l in der xz-Ebene liegt



$$R_z(-\alpha) = \begin{pmatrix} \cos(-\alpha) & -\sin(-\alpha) & 0 & 0 \\ \sin(-\alpha) & \cos(-\alpha) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & \sin(\alpha) & 0 & 0 \\ -\sin(\alpha) & \cos(\alpha) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Schritt 3

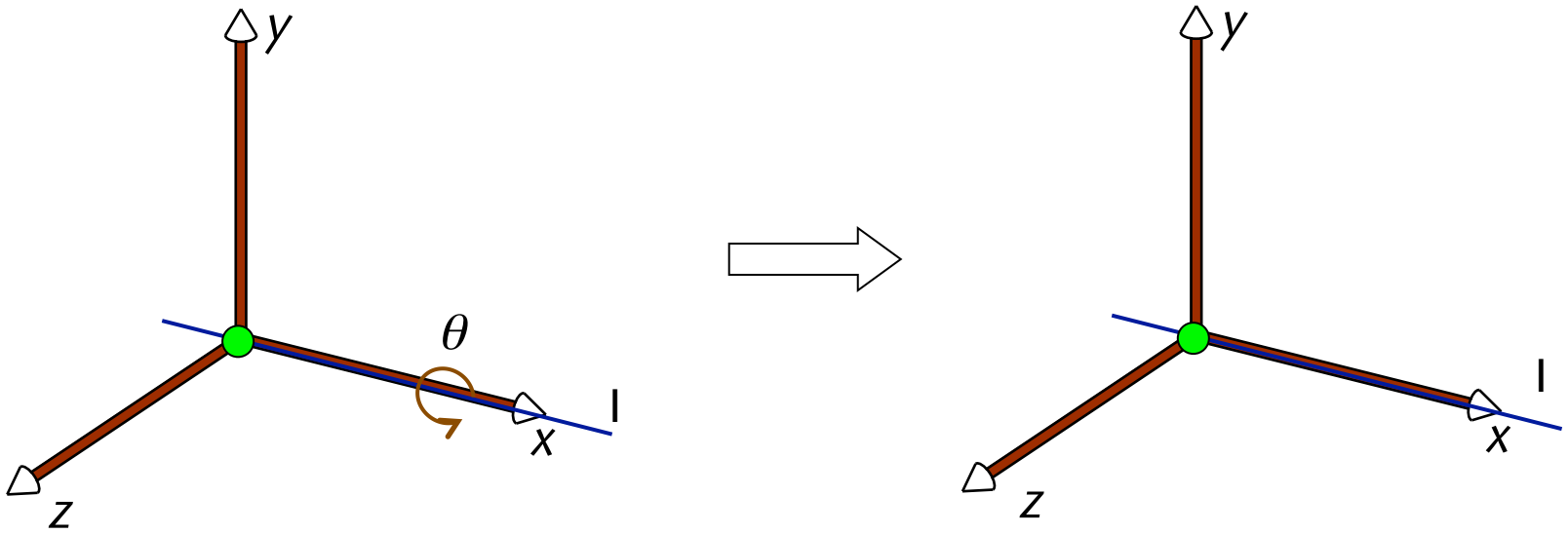
- Rotieren, so daß l auf einer Koordinatenachse liegt
- Hier: rotiere mit β um y-Achse damit Gerade auf der x-Achse liegt



$$R_y(\beta) = \begin{pmatrix} \cos(\beta) & 0 & \sin(\beta) & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\sin(\beta) & 0 & \cos(\beta) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Schritt 4

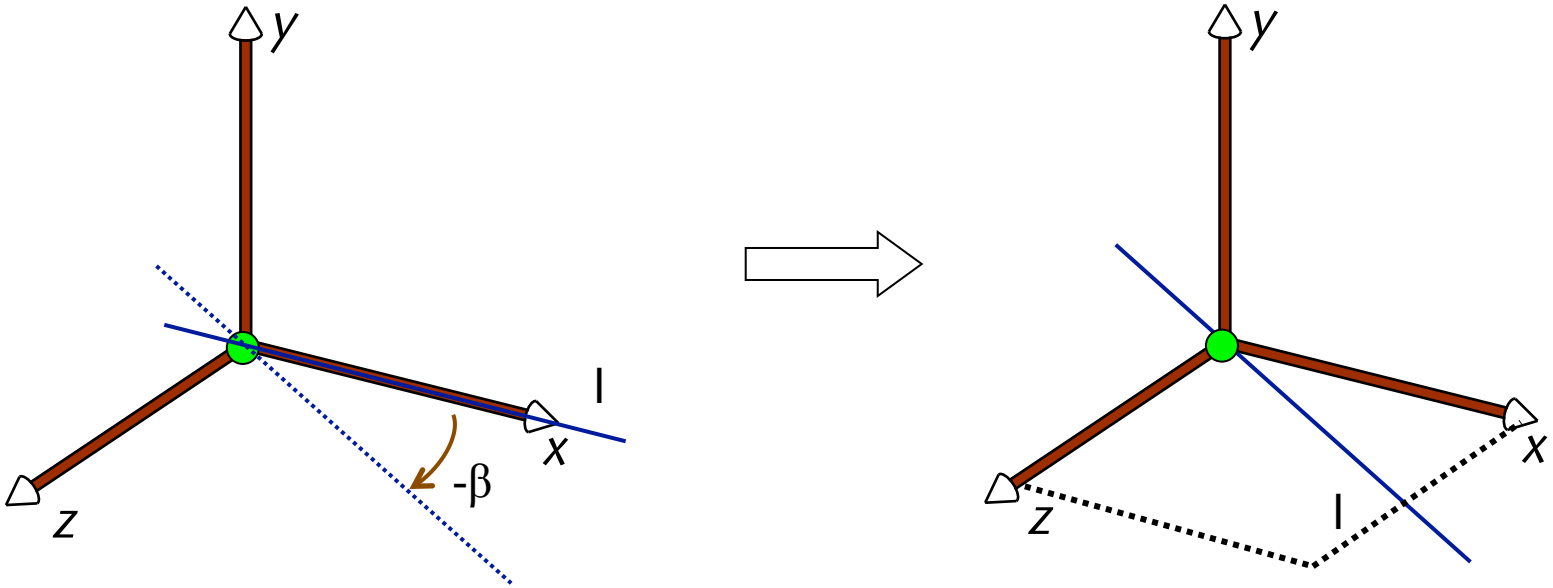
- Durchführen der gewünschten Rotation (rotiere mit θ um x-Achse)



$$R_x(\theta) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\theta) & -\sin(\theta) & 0 \\ 0 & \sin(\theta) & \cos(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Schritt 5

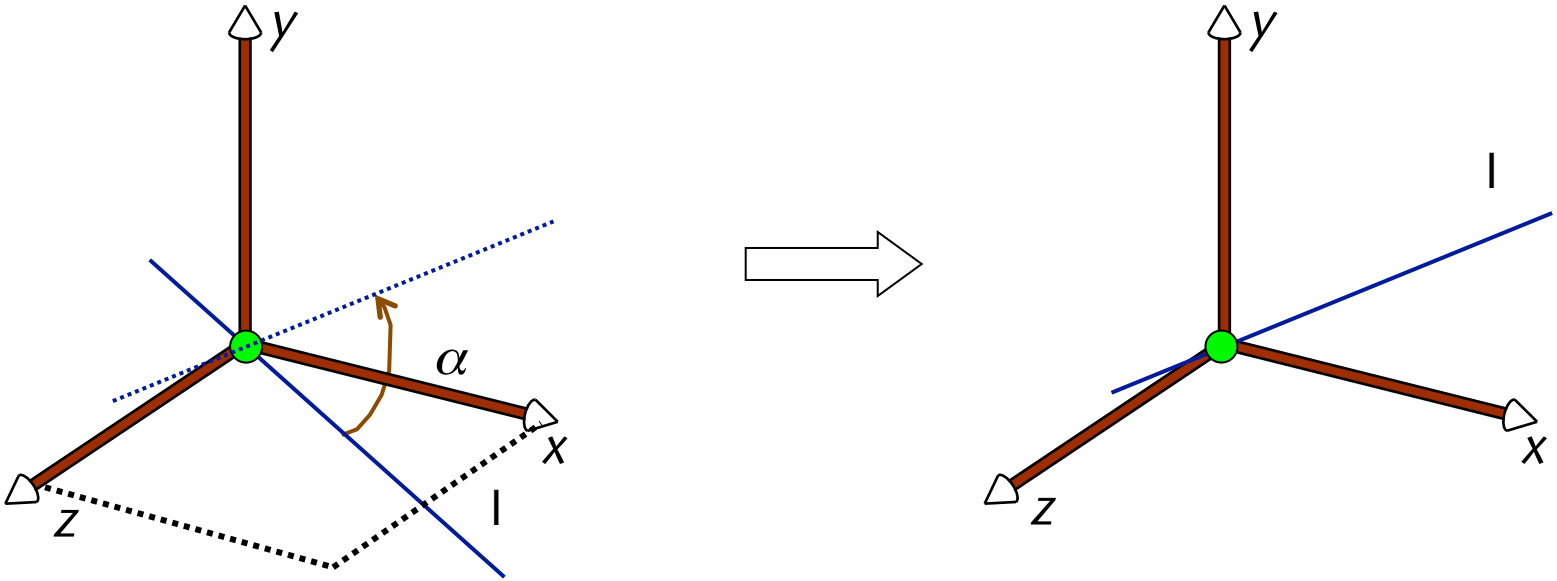
- Invertiere Rotation von l aus Schritt 3: rotiere mit -β um die y-Achse



$$R_y(-\beta) = \begin{pmatrix} \cos(-\beta) & 0 & \sin(-\beta) & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\sin(-\beta) & 0 & \cos(-\beta) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\beta) & 0 & -\sin(\beta) & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \sin(\beta) & 0 & \cos(\beta) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Schritt 6

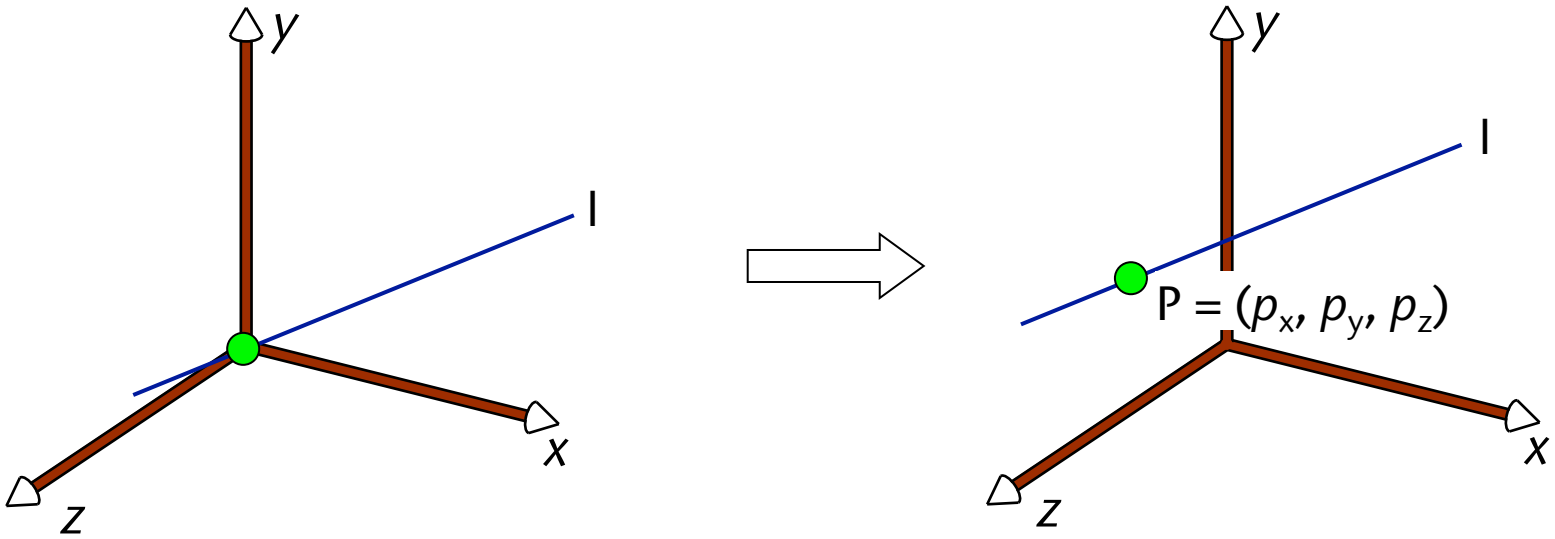
- Invertiere Rotation aus Schritt 2: rotiere mit α um z-Achse



$$R_z(\alpha) = \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) & 0 & 0 \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Schritt 7

- Invertiere die Translation aus Schritt 1



$$T_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & p_x \\ 0 & 1 & 0 & p_y \\ 0 & 0 & 1 & p_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Zusammenfassung

- Die vollständige Transformation zum Rotieren um eine beliebige Achse ist:

$$R_{arb} = T_2(p_x, p_y, p_z)\, R_z(\alpha)\, R_y(-\beta)\, R_x(\theta) \cdot R_y(\beta)\, R_z(-\alpha)\, T_1(-p_x, -p_y, -p_z)$$

  - Es gibt auch andere Varianten
- Hat man diese Matrix, so wendet man diese auf jeden Punkt des Objektes an, was den Effekt der Rotation dieses Objektes um die beliebige Achse hat
  - Das überläßt man natürlich OpenGL

Alternative

- Rotationsmatrix zu geg. Achse **r** auf einen Schlag aufstellen (oBdA geht **r** durch den Ursprung):

1. Erzeuge neue Basis (**r**, **s**, **t**) (bestimme **s** und **t**, orthogonal zu **r**; siehe Kapitel "Kurze Wiederholung in Geometrie")
2. Transformiere alles, so daß die Basis (**r**, **s**, **t**) in die Standardbasis (**x**, **y**, **z**) übergeht
3. Rotiere mit Winkel ϕ um **x**-Achse
4. Transformiere zurück in die ursprüngliche Basis

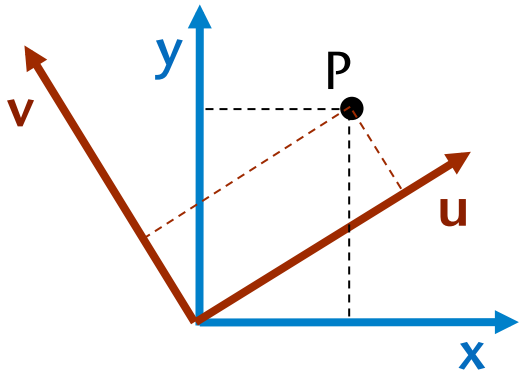
- Zusammen:

$$M = BR_x(\theta)B^{\mathsf{T}} \quad \text{mit} \quad B = \begin{pmatrix} | & | & | \\ \mathbf{r} & \mathbf{s} & \mathbf{t} \\ | & | & | \end{pmatrix}$$

Zusammenhang zwischen Rotation und Basiswechsel

- Man kann eine Rotationsmatrix aus den 3 Koordinatenachsen eines (neuen) Koordinatensystems konstruieren
- Gegeben: Einheitsvektoren **u, v, w**
- Setze:

$$R = \begin{pmatrix} | & | & | \\ \mathbf{u} & \mathbf{v} & \mathbf{w} \\ | & | & | \end{pmatrix}$$



- Damit ist

$$R \cdot \mathbf{e}_x = \mathbf{u}, \quad R \cdot \mathbf{e}_y = \mathbf{v}, \quad R \cdot \mathbf{e}_z = \mathbf{w}$$

$$R \cdot R^T = I$$

$$\det(R) = 1$$

- Also: R ist Rotation
  - Und zwar von xyz-Koordinaten → uvw-Koordinaten

Charakterisierung von (reinen) Rotationsmatrizen

- Erinnerung:
  - R ist orthogonal $\Leftrightarrow \quad RR^{\mathsf{T}} = I$
  - R orthogonal $\Rightarrow \quad \det(R) = \pm 1$
- Achtung: dabei können noch Spiegelungen enthalten sein!
- R ist eine ordentliche Rotation $\Leftrightarrow$

$$RR^{\mathsf{T}} = I \ \wedge \ \det(R) = +1$$

Zerlegung einer Rotationsmatrix

- Gegeben: Rotationsmatrix R

1. Aufgabe: den Rotationswinkel θ bestimmen

- Lösung:

$$1 + 2\cos\theta = \text{spur}(R)$$

- Beweis:
  - Zu R gibt es eine Basiswechselmatrix U, so daß

$$URU^{-1} = R_x(\theta) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

  - Es gilt:

$$\text{spur}(R) = \text{spur}\left(URU^{-1}\right) = \text{spur}\left(R_x(\theta)\right) = 1 + 2\cos\theta$$

Spezielle Eigenschaft der Spur

2. Aufgabe: Rotationsachse **r** bestimmen

- Lösung: **r** ist der Eigenvektor zum Eigenwert 1 der Matrix R
- Beweis: alle Vektoren auf der Rotationsachse bleiben fest, d.h.

$$R\mathbf{r} = 1 \cdot \mathbf{r}$$

- Berechnung der Eigenvektoren einer 3x3-Matrix:
  - Zur Erinnerung: zu jeder Matrix A gibt es eine adjungierte Matrix $A^{\#}$
  - Die Elemente $a_{ij}^{\#}$ der adjungierten Matrix sind definiert als

$$a_{ij}^{\#} = (-1)^{i+j} \det \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1i} & \cdots \\ \cdots & & & \\ a_{j1} & \cdots & a_{ji} & \cdots \\ \cdots & & & \end{pmatrix}$$

  - Es gilt: $AA^{\#} = \det(A) I$

- Falls $\det(A) = 0$, dann ist

$$AA^{\#} = 0 \cdot I = 0$$

- Also gilt für jeden Spaltenvektor **v** aus $A^{\#}$, daß

$$A \cdot \mathbf{v} = 0$$

- Gesucht ist der Eigenvektor **r** zum Eigenwert 1 von R, also ein **r**, so daß

$$(R - I) \cdot \mathbf{r} = 0$$

- Das sind gerade die Spalten von

$$(R - I)^{\#}$$

  - Alle Spalten sind Vielfache einer der Spalten

- Bemerkung: das funktioniert auch für größere Matrizen, ist aber nicht mehr effizient

Darstellung der Rotation als Achse & Winkel

- Damit haben wir folgenden wichtigen Satz bewiesen ...

- Satz (Euler):
  Jede beliebige Rotation im Raum lässt sich als Rotation um eine bestimmte Achse mit einem bestimmten Winkel darstellen.

- Anmerkung: in der Robotik wird gerne die Variante verwendet, wo

$$\text{Winkel} = \| \text{Rotationsachse} \|$$

  (damit benötigt man also wieder nur einen 3D-Vektor)