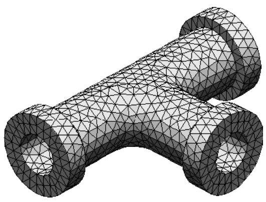
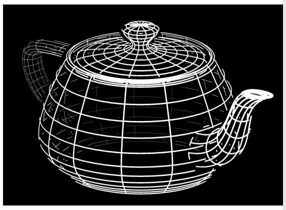
Computer-Graphik I
Randrepräsentationen für graphische Modelle

G. Zachmann
Clausthal University, Germany
cg.in.tu-clausthal.de

Das Problem

- Wie werden diese Objekte gespeichert?

- Definition *Boundary-Representation* (*B-Rep*):
Objekte "bestehen" aus
  1. Dreiecken, Quadraten und Polygonen (Geometrie)
  2. Nachbarschaftsbeziehungen ("Topologie", "connectivity")
- Im Gegensatz dazu gibt es auch Volumen- und Punkt-Repräsentationen

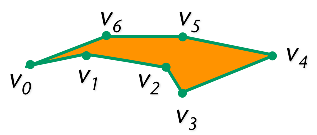
Now all we need are some models ...

Definitionen: Graphen

- Ein Graph ist ein Paar $G=(V, E)$, wobei $V=\{v_0,v_1,\ldots,v_{n-1}\}$ eine nichtleere Menge von n verschiedene Knoten (Punkten, Vertices) und E eine Menge von Kanten (v_i, v_j) ist.
- Ist V (diskrete) Teilmenge von $\mathbb{R}^d$ mit $d \geq 2$, so heißt $G=(V, E)$ ein geometrischer Graph.
- Zwei Kanten/Knoten heißen benachbart oder adjazent, falls sie einen Knoten / eine Kante gemeinsam haben.
- Ist $e=(v_i, v_j)$ eine Kante in G, so heißen e und v_i inzident zueinander (dito e und v_j);
  v_i und v_j heißen benachbart oder adjazent.
- Kanten sind für unsere Zwecke nicht gerichtet (zunächst und im Prinzip) und werden oft einfacher mit v_iv_j bezeichnet.

Polygon

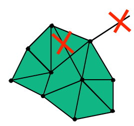
- Ein geometrischer Graph P=(V, E), wobei $V=\{v_0,v_1,\dots,v_{n-1}\}\mathbb{R}^d$, $d \geq 2$, und $E=\{ (v_0,v_1), \dots, (v_{n-1}, v_0) \}$ heißt Polygon.
- Die Knoten heißen auch Punkte oder Ecken oder Vertices.



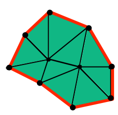
- Ein Polygon heißt
  - eben, falls alle Vertices in einer Ebene liegen;
  - einfach, falls der Schnitt jeweils zweier Kanten aus E leer oder ein Punkt aus V ist und jeder Eckpunkt nur zu höchstens zwei Kanten gehört (d.h. das Polygon sich selbst nicht schneidet).
- Per Definition betrachten wir nur geschlossene Polygone

Mesh (Polygonnetz)

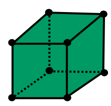
- Sei M eine Menge von endlich vielen, geschlossenen, einfachen Polygonen P_i ; sei $V = \bigcup_i V_i \quad E = \bigcup_i E_i$.
- M heißt Mesh gdw.
  - der Schnitt zweier Polygone aus M ist entweder leer, ein Punkt $v \in V$ oder eine Kante $e \in E$; und
  - jede Kante $e \in E$ gehört zu mindestens einem Polygon



- Die Menge aller Kanten, die nur zu einem einzigen Polygon gehören, heißt Rand des Meshes.

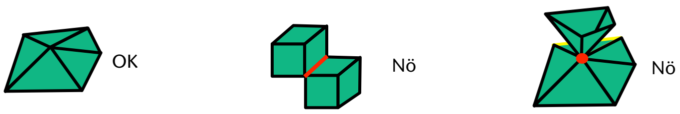


- Ist die Menge der Kanten, die nur zu einem Polygon gehören, leer, dann heißt das Mesh geschlossen.
- Die Menge aller Punkte V und Kanten E eines Meshes bilden wieder einen Graphen.



Definition: Polyeder

- Ein Mesh heißt Polyeder, falls
  - jede Kante $e \in E$ gehört zu genau zwei Polygonen (das Mesh ist geschlossen); und
  - keine Teilmenge des Meshes erfüllt diese Bedingung.



- Die Polygone werden auch als Facetten bezeichnet

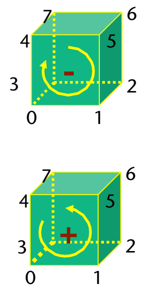
- Satz:
  Jeder Polyeder P teilt den Raum in zwei Gebiete: Inneres und Äußeres des Polyeders.

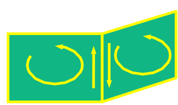
Orientierbarkeit

- Jede Facette eines Meshes kann durch die Definition eines Umlaufsinns orientiert werden.
  - Jede Facette kann auf genau zwei Arten orientiert werden

- Zwei Facetten eines Meshes, die längs einer Kante benachbart sind, heißen gleichorientiert, falls die Kante entgegengesetzt durchlaufen wird, wenn man die beiden Facetten entlang ihrer Orientierung "abwandert".

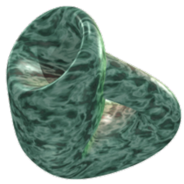
- Die Orientierung bestimmt die Richtung der Oberflächennormale einer Facette. Dazu wird in der Regel die Rechte-Hand-Regel verwendet.





- Ein Mesh heißt orientierbar, wenn alle Facetten des Meshes so orientiert werden können, daß je zwei benachbarte Facetten gleichorientiert sind.
  - Besitzen alle Facetten eine Orientierung mit dieser Eigenschaft, so heißt das Mesh orientiert.
- Ein Mesh heißt nicht orientierbar, falls bei jeder Wahl von Orientierungen der Facetten mindestens zwei benachbarte Facetten nicht gleichorientiert sind.

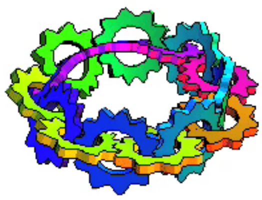
- Bemerkungen:
  - Jede im dreidimensionalen Raum eingebettete, geschlossene, nicht orientierbare Fläche besitzt eine Selbstdurchdringung.
  - Die Oberfläche eines Polyeders ist stets orientierbar



Exkurs: M. C. Escher

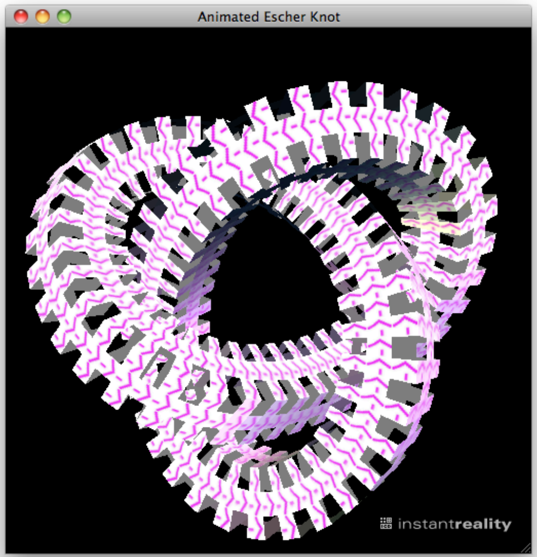
Möbius Strip II, woodcut, 1963

Exkurs im Exkurs



Interlocked Gears,
Michael Trott, 2001

Ist der Escher-Knoten orientierbar oder nicht?

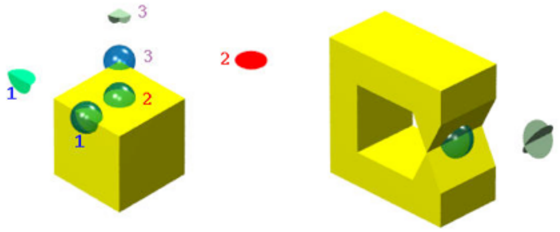


http://homepages.sover.net/~tlongtin

Zwei-Mannigfaltigkeiten (2-manifolds)

- Definitionen:
  - Homöomorphismus = bijektive, stetige Abbildung zwischen zwei Objekten (Flächen), deren Umkehrabbildung wieder stetig ist
    - Achtung: nicht verwechseln mit Homomorphismus!
    - Veranschaulichung: Stauchen, Dehnen, Scheren, Verdrehen ist erlaubt, aber nicht Schneiden, Loch machen, etc.
  - Zwei Objekte sind homöomorph gdw. es einen Homöomorphismus zwischen beiden gibt
  - Diese Objekte heißen auch topologisch äquivalent
- Beispiel:

- Definition: Eine Fläche heißt zwei-mannigfaltig gdw. zu jedem Punkt der Fläche eine offene Kugel existiert, so daß der Schnitt zwischen Kugel und Fläche topologisch äquivalent zu einer Kreisscheibe ist.
- Beispiele:

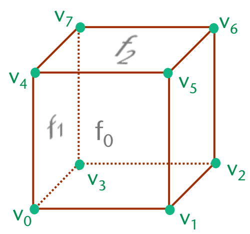


- Achtung: in der CG wird fast immer der Begriff "manifold" verwendet, wenn 2-manifold gemeint ist!
- Der Begriff "*piecewise linear manifold*" wird manchmal verwendet, um ein Mesh zu bezeichnen ...

Datenstrukturen für Meshes

- Die naiveste Datenstruktur:
  - Array von Polygonen; jedes Polygon = Array von Vertices
  - Beispiel:

face[0] =	*face[1]* =	*face[2]* =	...
$x_0\ y_0\ z_0$	$x_0\ y_0\ z_0$	$x_4\ y_4\ z_4$	
$x_1\ y_1\ z_1$	$x_4\ y_4\ z_4$	$x_5\ y_5\ z_5$	
$x_5\ y_5\ z_5$	$x_7\ y_7\ z_7$	$x_6\ y_6\ z_6$	
$x_4\ y_4\ z_4$	$x_3\ y_3\ z_3$	$x_7\ y_7\ z_7$	



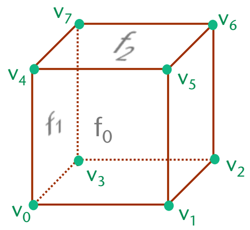
- Probleme:
  - Vertices kommen mehrfach vor!
    - Speicherverschwendung, Problem bei Animation, ...
  - Wie findet man zu einem geg. Vertex alle Faces, in denen er vorkommt?
  - Verschieden große Arrays für verschieden lange Polygone

Indexed Face Set

- Wahrscheinlich die häufigste Datenstruktur
- Idee: gemeinsamer "Vertex-Pool" (*shared vertices*)
- Beispiel:

vertices =
$x_0\ y_0\ z_0$
$x_1\ y_1\ z_1$
$x_2\ y_2\ z_2$
$x_3\ y_3\ z_3$
. . .

face	*vertex index*
0	0, 1, 5, 4
1	0, 3, 7, 4
2	4, 5, 6, 7
. . .	

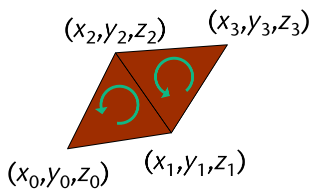


- Probleme:
  - Kanten werden (implizit) 2x gespeichert
  - Immer noch keine Nachbarschaftsinformationen

- Folge:
  - Alle zu einem Vertex inzidenten Facetten zu finden kostet $O(n)$ Zeit, wobei n = # Vertices im Mesh
  - Dito für alle zu einem Vertex adjazenten Vertices
  - Komplette Breitensuche kostet $O(n^2)$ Zeit (Mit einer Breitensuche kann z.B. festgestellt werden, ob es sich um ein geschlossenes Objekt handelt)

Das OBJ-Fileformat

- Indexed Face Set
- Zeilenbasiert
- Geordnete Liste von Vertices:
  - Eingeleitet durch "v"
  - Räumliche Koordinaten x, y, z
  - Index durch die Reihenfolge gegeben
- Polygonliste:
  - Polygon wird eingeleitet durch "f"
  - Geordnete Liste von Vertex-Indizes
  - Länge einer Liste = # der Seiten
  - Orientierung durch die Reihenfolge gegeben
- Im Prinzip können "v" und "f" beliebig gemischt werden

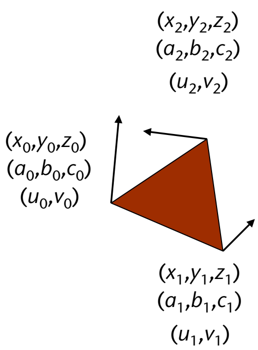


v x_0 y_0 z_0
v x_1 y_1 z_1
v x_2 y_2 z_2
v x_3 y_3 z_3

f 0 1 2
f 1 3 2

Weitere Attribute

- Vertex-Normalen:
  - Präfix mit "vn"
  - Enthält x, y, z der Normalen
  - Nicht notw.weise in Einheitslänge
  - Nicht zwingend in Vertex-Reihenfolge
  - Indizes wie bei den Vertices
- Texturkoordinaten:
  - Präfix mit "vt"
  - Nicht zwingend in Vertices-Reihenfolge
  - Enthält u,v-Texturkoordinaten
- Polygone:
  - Benutzt "/" um die Indizes voneinander abzugrenzen
  - Vertex / Normale / Textur
  - Normale und Textur sind optional
  - Die Normale kann durch "//" eliminiert werden

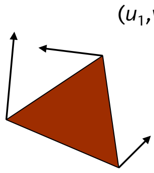


v x_0 y_0 z_0
v x_1 y_1 z_1
v x_2 y_2 z_2

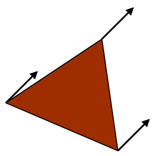
vn a_0 b_0 c_0
vn a_1 b_1 c_1
vn a_2 b_2 c_2

vt u_0 v_0
vt u_1 v_1
vt u_2 v_2

f 0/0/0 ...
f ...



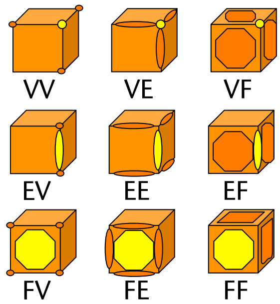
f 0/0/0 1/1/1 2/2/2

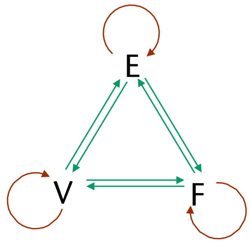


f 0/1/0 1/1/1 2/1/2

Nachbarschaftsbeziehungen (Weiler 1985)

	gegeben	gesucht ("alle benachbarte ..")	Abb
1	Vertex	Vertices	V → V
2	Vertex	Kanten	V → E
3	Vertex	Facetten	V → F
4	Kante	Vertices	E → V
5	Kante	Kanten	E → E
6	Kante	Facetten	E → F
7	Facette	Vertices	F → V
8	Facette	Kanten	F → E
9	Facette	Facetten	F → F





Abstrakte Notation einer DS mit Nachbarschaftsbeziehungen:

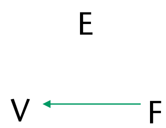
Pfeile geben Inzidenz-/Adjazenz-Daten an

- Beispiel: Indexed Face Set

vertices =
$x_0\ y_0\ z_0$
$x_1\ y_1\ z_1$
$x_2\ y_2\ z_2$
$x_3\ y_3\ z_3$
. . .

face	*vertex index*
0	0, 1, 5, 4
1	0, 3, 7, 4
2	4, 5, 6, 7
. . .	

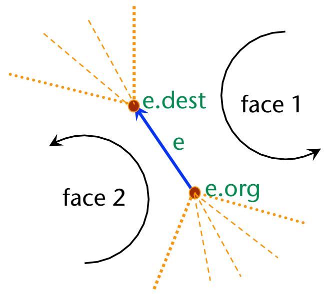
=



- Frage: welches ist die minimale Datenstruktur, die alle Nachbarschaftsbeziehungen in Zeit O(1) liefern kann?

Die Winged-Edge-Datenstruktur [Baumgart '74]

- Idee: kantenbasierte Datenstruktur (im Gegensatz zu Face-basiert)
- Beobachtungen:
  - Eine Kante speichert zwei Indizes auf 2 Vertices: ***e.org* , *e.dest***
    → ergibt eine Orientierung der Kante
  - In einem (orientierten) Polyeder grenzt eine Kante an genau 2 Facetten
  - Eine dieser Facetten ist gleichorientiert wie die Kante, die andere entgegen der Kante



Die Datenstruktur

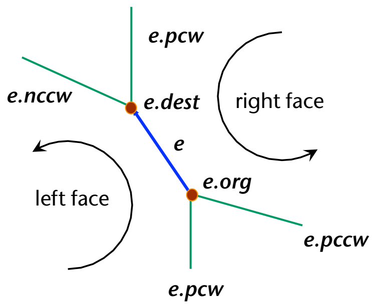
- Jede Kante hat 4 Zeiger auf 4 inzidente Kanten:

  e.ncw = Kante inzident zu ***e.dest*** und adjazent zu *right face* (next clockwise)

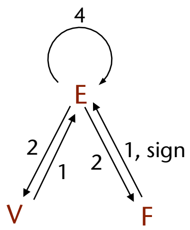
  e.nccw = Kante inzident zu ***e.dest*** und adjazent zu *left face* (next counter-clockwise

  e.pcw / ***e.pccw*** = Kante inzident zu ***e.org*** und adjazent zu *left* / *right face*

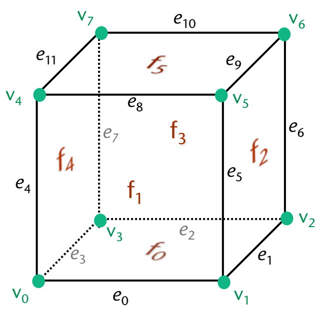
- Beobachtung: sind die Facetten konsistent orientiert, kommt jede Kante einmal "+" und einmal "-" vor.



- Zusätzlich:
  - Jede Kante speichert je einen Zeiger auf die linke bzw. rechte Facette (*e.lf, e.rf*)
  - Jede Facette speichert 1 Zeiger auf eine beliebige inzidente Kante
  - Jeder Vertex speichert 1 Zeiger auf eine beliebige inzidente Kante
- Abstrakte Repräsentation:



Beispiel



Vertexliste

v	coord			e
0	0.0	0.0	0.0	0
1	1.0	0.0	0.0	1
2	1.0	1.0	0.0	2
3	0.0	1.0	0.0	3
4	0.0	0.0	1.0	8
5	1.0	0.0	1.0	9
6	1.0	1.0	1.0	10
7	0.0	1.0	1.0	11

Facetten

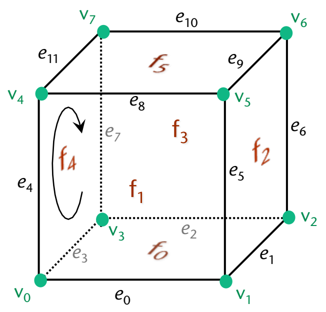
0	e0	-
1	e8	-
2	e5	-
3	e6	-
4	e11	-
5	e8	+

Kantenliste

e	*org*	*dest*	*ncw*	*nccw*	*pcw*	*pccw*	*lf*	*rf*
0	v0	v1	e1	e5	e4	e3	f1	f0
1	v1	v2	e2	e6	e5	e0	f2	f0
2	v2	v3	e3	e7	e6	e1	f3	f0
3	v3	v0	e0	e4	e2	e7	f4	f0
4	v0	v4	e8	e11	e0	e3	f4	f1
5	v1	v5	e9	e8	e1	e0	f1	f2
6	v2	v6	e10	e9	e2	e1	f2	f3
7	v3	v7	e11	e10	e3	e2	f3	f4
8	v4	v5	e5	e9	e4	e11	f5	f1
9	v5	v6	e6	e10	e5	e8	f5	f2
10	v6	v7	e7	e11	e9	e6	f5	f3
11	v7	v4	e4	e8	e10	e7	f5	f4

Beispiel für das Durchlaufen der Datenstruktur

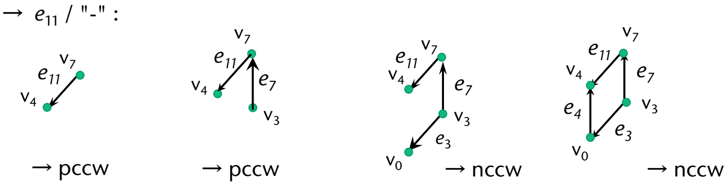
- Alle Kanten von f_4 in CCW-Reihenfolge aufzählen:



Kantenliste

e	*org*	*dest*	*ncw*	*nccw*	*pcw*	*pccw*	*lf*	*rf*
0	v0	v1	e1	e5	e4	e3	f1	f0
1	v1	v2	e2	e6	e5	e0	f2	f0
2	v2	v3	e3	e7	e6	e1	f3	f0
3	v3	v0	e0	e4	e2	e7	f4	f0
4	v0	v4	e8	e11	e0	e3	f4	f1
5	v1	v5	e9	e8	e1	e0	f1	f2
6	v2	v6	e10	e9	e2	e1	f2	f3
7	v3	v7	e11	e10	e3	e2	f3	f4
8	v4	v5	e5	e9	e4	e11	f5	f1
9	v5	v6	e6	e10	e5	e8	f5	f2
10	v6	v7	e7	e11	e9	e6	f5	f3
11	v7	v4	e4	e8	e10	e7	f5	f4

$f_4 \rightarrow e_{11}$ / "-" :

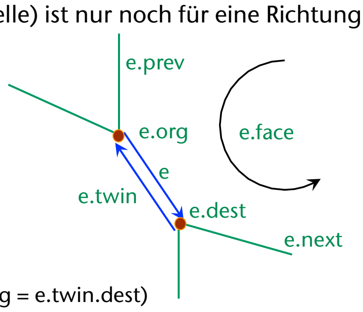


Ende

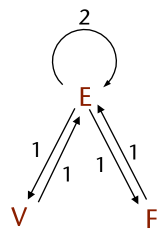
- Alle Nachbarschafts-Abfragen lassen sich in Zeit $O(k)$ durchführen! (k = Größe der Ausgabe)
  - 3 direkte Abfragen und 6 Abfragen durch lokales Umrunden einer Facette oder eines Vertex
- Problem: wenn man sich an einer Kante entlang "hangeln" möchte, muß man jedesmal testen, wie die Kante orientiert ist, um zu wissen, ob man ***n[c]cw*** oder ***p[c]cw*** verfolgen muß!

Doubly-Connected Edge List [Preparata & Müller, 1978]

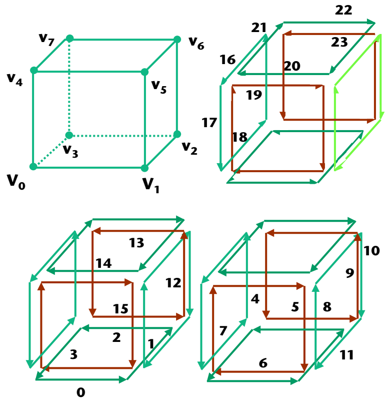
- In der Computer-Graphik eher bekannt als *"half-edge data structure"*
- Ist die einfachste Nachbarschaftsdatenstruktur
- Idee:
  - Wie Winged-Edge-DS, aber mit "gespaltenen" Kanten
  - Eine Kante (= Eintrag in der Kantentabelle) ist nur noch für eine Richtung und eine Seite zuständig
  - Zeiger pro Halb-Kante:
    - "Twin" (**twin** | **opposite**)
    - Start- (**org**) und End-Vertex (**dest**)
    - Incident **face** (zur Linken)
    - **Next** und **prev**ious edge (im Umlaufsinn)
    - (Start-Vertex kann man einsparen, da e.org = e.twin.dest)



- Abstrakte Notation:
  - Hier ohne Start-Vertex-Zeiger
  - Benötigt doppelt so viele Einträge in der Kanten-Tabelle wie die Winged-Edge-DS



Beispiel (hier in CW-Order!)



Vertexliste

v	coord			e
0	0.0	0.0	0.0	0
1	1.0	0.0	0.0	1
2	1.0	1.0	0.0	2
3	0.0	1.0	0.0	3
4	0.0	0.0	1.0	4
5	1.0	0.0	1.0	9
6	1.0	1.0	1.0	13
7	0.0	1.0	1.0	16

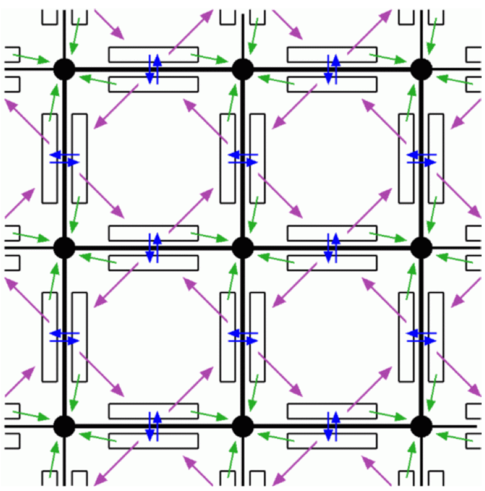
Facetten

0	e20
1	e4
2	e0
3	e15
4	e16
5	e8

Halbkantenliste

e	org	nxt	prv	twin	e	org	nxt	prv	twin
0	0	1	3	6	12	2	13	15	10
1	1	2	0	11	13	6	14	12	22
2	2	3	1	15	14	7	15	13	19
3	3	0	2	18	15	3	12	14	2
4	4	5	7	20	16	7	17	19	21
5	5	6	4	8	17	4	18	16	7
6	1	7	5	0	18	0	19	17	3
7	0	4	6	17	19	3	16	18	14
8	1	9	11	5	20	5	21	23	4
9	5	10	8	23	21	4	22	20	16
10	6	11	9	12	22	7	23	21	13
11	2	8	10	1	23	6	20	22	9

- Visualisierung für ein Quad-Mesh:



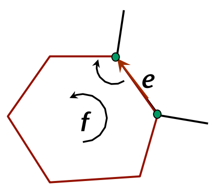
Invarianten in einer DCEL

- Verwende im folgenden die "Funktionen-Notation", d.h., twin(e) = e.twin
- Invarianten (bzw. Axiome im ADT "DCEL"):
  - twin(twin(e)) = e , falls das Mesh geschlossen ist
  - org(next(e)) = dest(e)
  - org(e) = dest(twin(e)) [falls twin(e) existiert]
  - org(v.edge) = v [v zeigt immer auf eine "abgehende" Kante!]
  - etc. ...

Beispiele für das "Abwandern" der Topologie

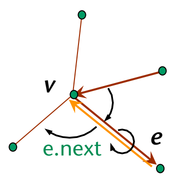
- Gesucht: alle Vertices, die inzident zu einem geg. Face ***f*** sind
- Pseudo-Code:

```
e_start ← f.edge
e ← e_start
repeat
  output e.dest
  e ← e.next
until e == e_start
```



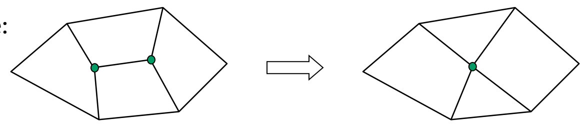
- Aufgabe: zu geg. Vertex v alle benachbarten Vertices liefern
- Pseudo-Code:

```
e_start ← v.edge
e ← e_start
repeat
  output e.org
  e ← e.twin
  e ← e.next
until e == e_start
```

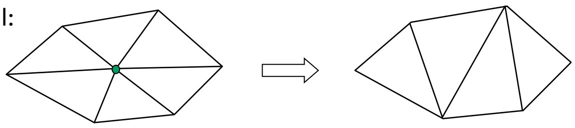


Anwendungsbeispiel

- Simplifizierung: Grobes Mesh aus einem gegebenen "feinen" Mesh erzeugen
  - Dabei Einhaltung bestimmter Kriterien (wird hier nicht weiter vertieft)
- Elementare Operationen:
  - Edge Collapse:



    - Benötigt alle Kanten adjazent zu e
  - Vertex Removal:



    - Benötigt alle Kanten inzident zu v

Eine DCEL-Datenstruktur für Nicht-2-Mannigfaltigkeiten

- Eine DCEL repräsentiert 2-Mannigfaltigkeiten
- *Directed Edge DS*: Erweiterung von Half-Edge-DS für Meshes, die an Ausnahmestellen keine 2-Mannigfaltigkeit sind

- Idee:
  - Pointer auf die Kanten (e.next, e.prev, v.edge, f.edge) als Integer-Index in das Edge-Array speichern
  - Benutze Vorzeichen des Index als Hinweis auf zusätzliche Information
  - Interpretiere negative Indizes als Indizes in zusätzliche Arrays, z.B.
    - Liste aller Kanten, die von Vertex ausgehen, oder
    - Zusammenhangskomponenten an Vertex / Kante

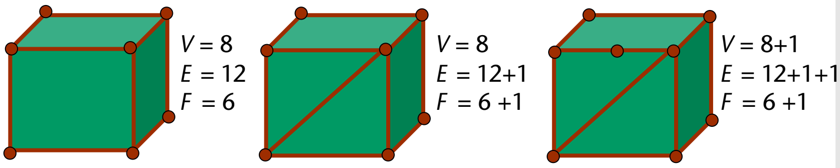
Die Euler-Formel

- Satz (Eulerformel):
  Für alle Polyeder, die homöomorph zu einer Kugel sind, gilt

$$V - E + F = 2$$

  wobei V, E, F = Anzahl Vertices, Edges, Faces

- Beispiele:



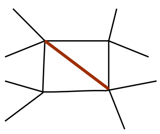
Beweis (nach Cauchy)

- Gegeben: geschlossenes Mesh (Polyeder)
- Erste Idee:
  - Entferne eine Facette (ergibt offenes Mesh; Rand ist genau der Kantenzug der entfernten Facette)
  - Ziehe Mesh an diesem Rand auseinander in planaren Graphen (geht nur, wenn Polyeder homöomorph zu Kugel)
  - Jetzt zu zeigen:

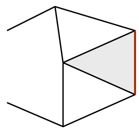
$$V - E + F = 1$$

- Zweite Idee: trianguliere den Graphen (das Mesh)
  - Ziehe Diagonale in Facetten mit mehr als 3 Vertices ein
  - Es gilt weiterhin

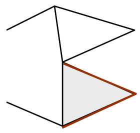
$$V' - E' + F' = V - (E + 1) + (F + 1) = V - E + F$$



- Der Graph hat einen Rand; Dreiecke haben 0, 1, oder 2 "Randkanten"
- Wiederhole eine der folgenden beiden Transformartionen:
  - Falls es ein Dreieck mit genau 1 Randkante gibt, lösche dieses Dreieck; es gilt
    $V' - E' + F' = V - (E-1) + (F-1) = V - E + F$



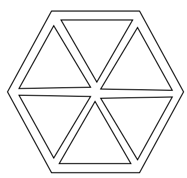
  - Falls es ein Dreieck mit genau 2 Randkanten gibt, lösche dieses Dreieck; es gilt
    $V' - E' + F' = (V-1) - (E-2) + (F-1) = V - E + F$



- Wiederhole, bis nur noch 1 Dreieck übrig
  - Für das Dreieck gilt die Euler-Formel offensichtlich
  - Da jede der obigen Transformationen den Wert von V-E+F unverändert gelassen hat, gilt die Formel also auch für den ursprünglichen Graphen, und damit auch für das ursprüngliche Mesh.

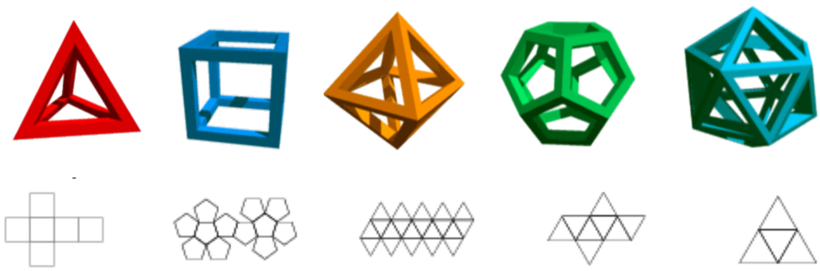
Anwendungen der Euler-Formel

- Zusammenhang zwischen #Dreiecken und #Vertices in einem geschlossenen Dreiecks-Mesh:
  - Jede Kante gehört zu genau 2 Dreiecken, also
    $$3F = 2E$$



  - Einsetzen in Euler-Formel:
    $$2 = V - \frac{3}{2}F + F \Leftrightarrow \frac{1}{2}F = V{-}2$$
  - Bei großen Dreiecks-Meshes gilt also
    $$F \approx 2V$$

- Platonische Körper:
  - Definition: ein konvexes Polyeder, das aus lauter gleichen (kongruenten) regulären Polygonen besteht
- Satz (Euklid):
  Es gibt genau fünf platonische Körper.



Beweis

- Alle Facetten haben die gleiche Anzahl Kanten, n; also:

$$2E = nF \Leftrightarrow F = \frac{2}{n}E$$

- An allen Vertices treffen sich die gleiche Anzahl Kanten, m; also

$$2E = mV \Leftrightarrow V = \frac{2}{m}E$$

- Einsetzen in die Euler-Formel:

$$2 = V - E + F = \frac{2}{m}E - E + \frac{2}{n}E \Leftrightarrow \frac{2}{E} = \frac{2}{m} - 1 + \frac{2}{n}$$

- Ergibt folgende Bedingung für m und n:

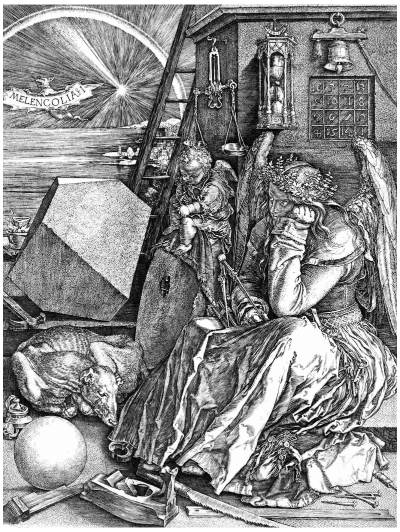
$$\frac{1}{m} + \frac{1}{n} = \frac{1}{2} + \frac{1}{E} > \frac{1}{2}$$

- Weitere Bedingung: *m* und *n* müssen jeweils ≥ 3 sein
- Welche {*m*,*n*} erfüllen diese Bedingungen:
  {3,3} {3,4} {4,3} {5,3} {3,5}

Exkurs: platonische Körper in der Kunst

- Die platonischen Polyeder waren mindest 1000 Jahre vor Plato schon in Schottland bekannt

Portrait of Johannes Neudörfer and his Son
Nicolas NEUFCHATEL, 1527—1590

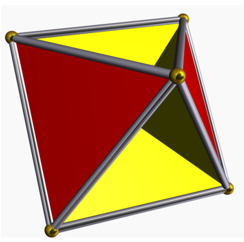


Dürer: *Melencolia I*

Die Euler-Charakteristik

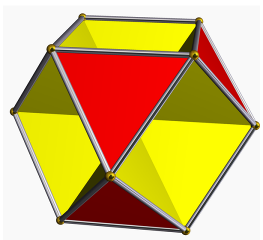
- Achtung: die Euler-Formel gilt so nur für Polyeder, die topologisch äquivalent zur Kugel sind!
- Beispiele:

Tetrahemihexahedron



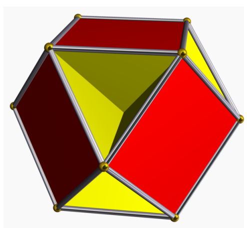
6 - 12 + 7 = 1

Octahemioctahedron



12 - 24 + 12 = 0

Cubohemioctahedron



12 - 24 + 10 = -2

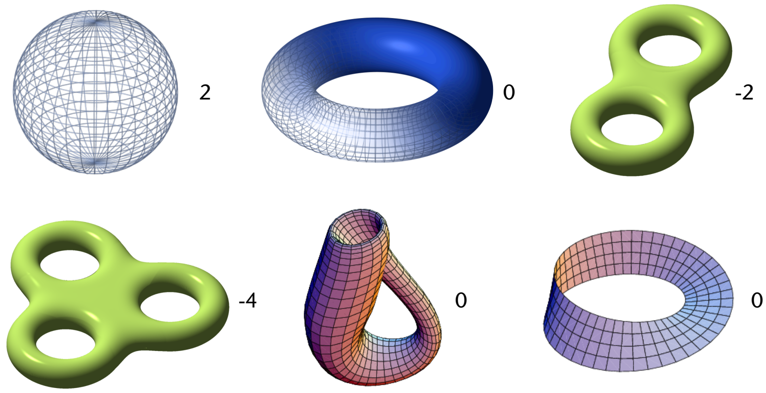
V
E
F

- Aber: die Größe V-E+F bleibt erhalten, egal wie man das Polyeder verformt (homöomorph) → topologische Invariante

- Definition Euler-Charakteristik:

$$\chi = V - E + F$$

- Beispiele:



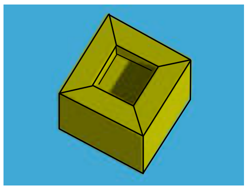
Die Euler-Poincaré-Formel

- Verallgemeinerung der Euler-Formel auf 2-mannigfaltige, geschlossene Flächen (evtl. mit mehreren Komponenten):

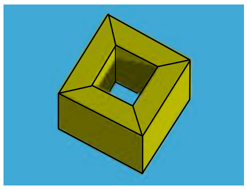
$$V - E + F = 2(S - G)$$

  - G = # Henkel , S = # *Shells* (Schalen / Komponenten)
  - Henkel (Loch, hole) = eine Schnur im Inneren eines Henkels kann man nicht auf einen Punkt zusammenziehen
  - G = Genus
  - Schale (shell) = durch Wandern auf der Schale kann man jeden Punkt der Schale von jedem anderen aus erreichen
  - Durch "innere" Schalen kann man sog. "Voids" (Aushöhlungen) aus einem Körper herausnehmen
- Es gibt noch weitere Verallgemeinerungen!

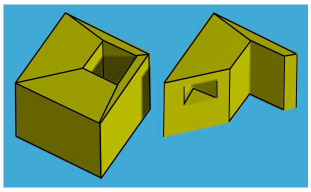
- Beispiele:
  - V = 16, E = 28, F = 14, S = 1, G = 0:
    V-E+F = 2 = 2(S-G)



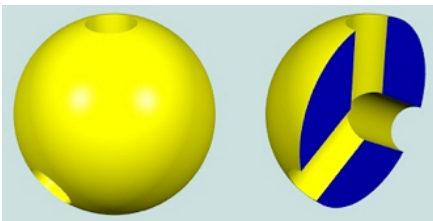
  - V = 16, E = 32, F = 16, S = 1, G = 1:
    V-E+F = 0 = 2(S-G)

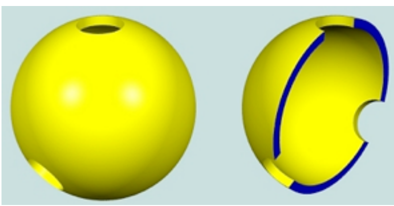


  - V = 16+8, E = 32+12, F = 16+6,
    G = 1, S = 2:
    V-E+F = 2 = 2(S-G)

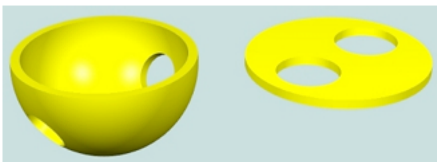


- Achtung: der Genus ist manchmal nicht ganz einfach zu bestimmen!
- Beispiel:
  - Genus = 2
  - "Beweis": topologisch äquivalent deformieren, bis Genus klar ist





1.



2. 3.