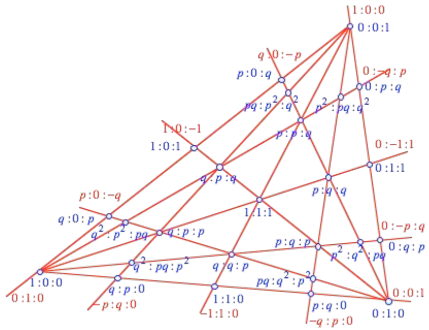
Computer-Graphik I

Baryzentrische Koordinaten und Anwendungen



G. Zachmann
University of Bremen, Germany
cgvr.cs.uni-bremen.de

Definitionen

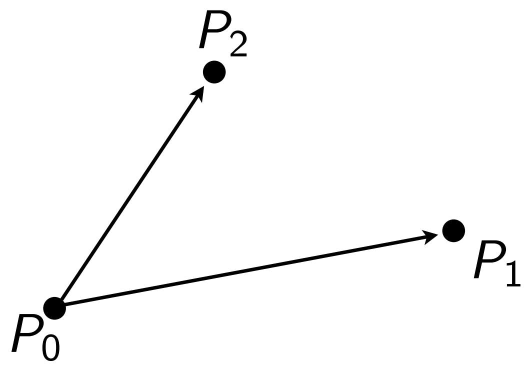
- Def.: affin unabhängig

  Gegeben: k+1 Punkte $P_i \in \mathbb{R}^n,\ 0 \leq i \leq k$.
  Seien dadurch k Vektoren v_i definiert: $v_i := P_i - P_0\ ,\quad i = 1, \ldots, k$

  Die Punkte P_i heißen affin unabhängig $\Leftrightarrow$

  die Vektoren v_i linear unabhängig sind.

- Beispiel:



- Lemma:

  Falls die k+1 Punkte $P_i \in \mathbb{R}^n$ affin unabhängig sind $\Rightarrow k \leq n$.


Möbius

- Def.: affines Koordinatensystem

Wenn k+1 Punkte $P_0, \ldots, P_k \in \mathbb{R}^n$ affin unabhängig sind, so definieren sie ein affines Koordinatensystem (aka. affine Basis).

- Def.: baryzentrische Kombination, baryzentrische Koordinaten

Seien k+1 affin unabhängige Punkte $P_0, \ldots P_k \in \mathbb{R}^n$ gegeben. Daraus kann man weitere Punkte konstruieren mittels einer baryzentrische Kombination (a.k.a. affine Kombination):

$$P = \sum_{i=0}^{k} \lambda_i P_i, \quad \text{mit} \quad \sum_{i=0}^{k} \lambda_i = 1, \ \lambda_i \in \mathbb{R}$$

Die λ_i heißen baryzentrische Koordinaten von P bzgl. der Koordinatensystems $[P_0, P_1, \ldots, P_k]$

Eindeutigkeit der baryzentrischen Koordinaten

- Satz (o. Bew.):

  Die Punkte $P_0, \ldots P_k \in \mathbb{R}^n,\ k \leq n$, sind affin unabhängig $\Leftrightarrow$ die affine Kombination bzgl. dieser Punkte ist eindeutig, d.h.

$$\forall s_i, t_i \in \mathbb{R} \text{ mit } \sum s_i = \sum t_i = 1 :$$

$$\sum s_i P_i = \sum t_i P_i \ \Leftrightarrow\ \forall i = 0, \ldots, k :\ s_i = t_i$$

- Konsequenz: falls die Punkte $P_0, \ldots P_k \in \mathbb{R}^n$, **nicht** affin unabhängig sind, dann kann es mehrere mögliche λ's geben!

Affine Abbildungen

- Definition:
  Affine Abbildung := jede Abbildung ϕ, die *invariant* bzgl. affiner Kombinationen ist.
  Affine Invarianz bedeutet:

$$\phi(P) = \phi\left(\sum \lambda_i P_i\right) = \sum \lambda_i \; \phi(P_i)$$

- M.a.W.: eine affine Abbildung ist eindeutig durch die Bilder der affinen Basis festgelegt.
- Vorgriff (o. Bew.): Affine Abbildungen "="

  {alle lineare Abbildungen} + {alle Translationen}

Kleiner Exkurs: die konvexe Hülle

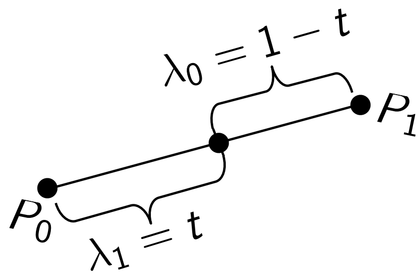
- Definition: konvexe Hülle

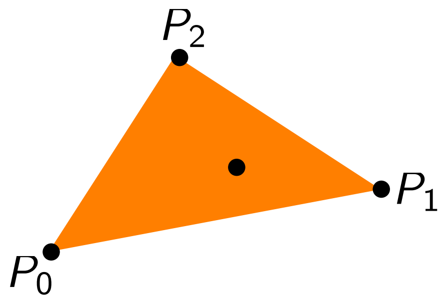
  Seien $P_0, \ldots, P_k$ Punkte (*nicht* notw.weise affin unabhängige Pkte).
  Dann ist die konvexe Hülle dieser Punkte definiert als:

$$\mathrm{CH}(P_0, \ldots, P_k) := \left\{ P \mid P = \sum \lambda_i P_i,\ \sum \lambda_i = 1,\ \forall i : \lambda_i \geq 0 \right\}$$

  In diesem Fall gilt $\forall i :\ 0 \leq \lambda_i \leq 1$.
  Eine solche Summe heißt auch konvexe Kombination.

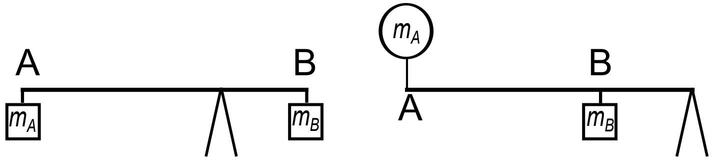
- Beispiele:
  - $P_0, P_1 \longrightarrow$ Strecke
  - $P_0, P_1, P_2 \longrightarrow$ Dreieck

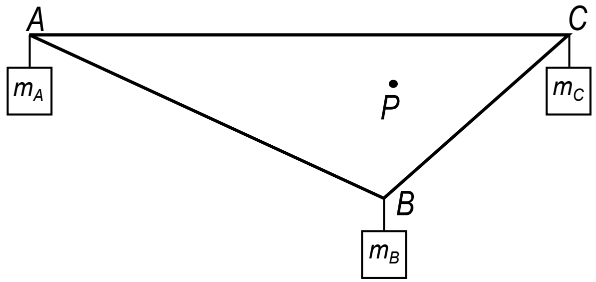


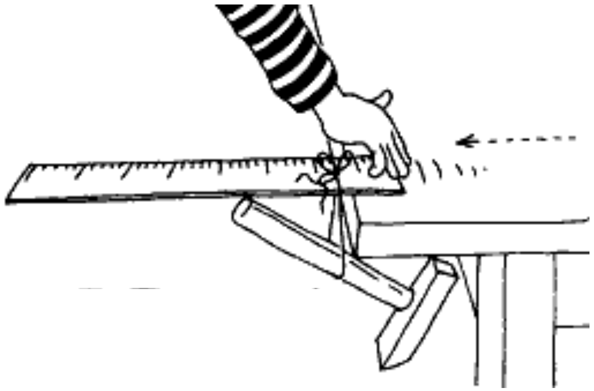


Physikalische Interpretation

- Gegeben $k+1$ Punkte $P_0, \ldots, P_k \in \mathbb{R}^n$ mit den Massen m_i , $\sum m_i \neq 0$
- Definiere die "normierten Massen" $\lambda_i = \frac{m_i}{\sum m_i}$
- Dann ist der Punkt $P = \sum \lambda_i P_i$ genau der Schwerpunkt der k+1 Punkte
  - A.k.a. Barycenter



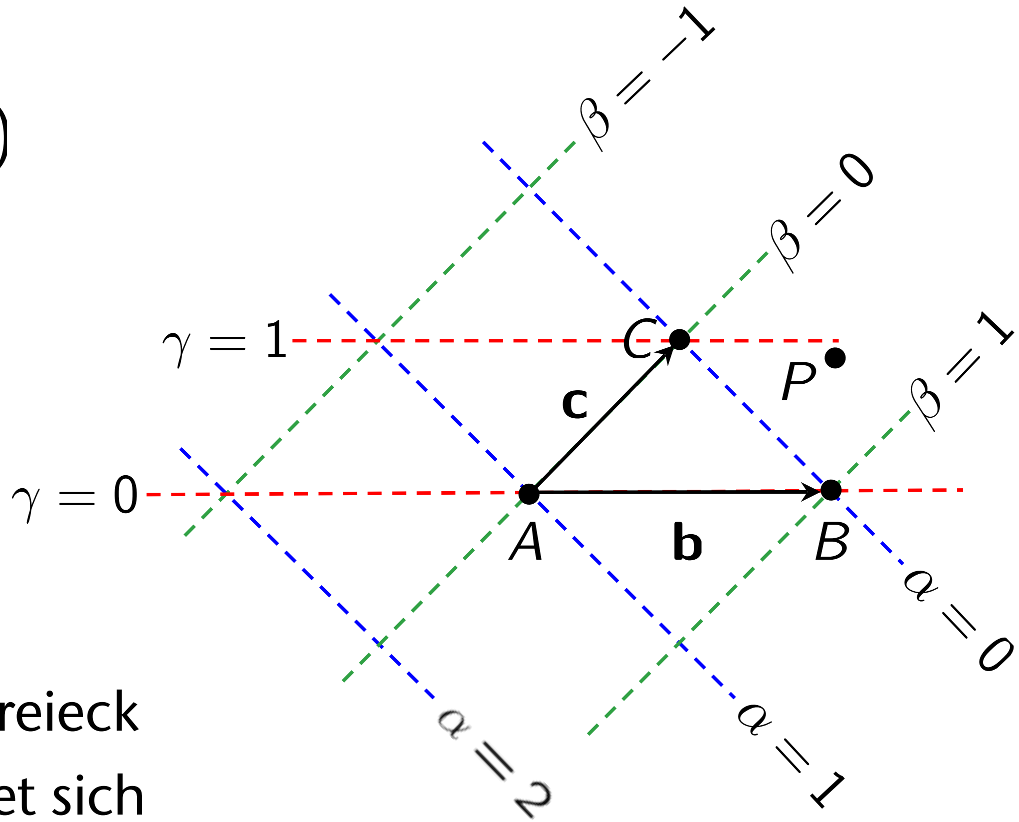




Isolinien an einem Dreieck

$$
\begin{aligned}
P &= A + \beta \mathbf{b} + \gamma \mathbf{c} \\
&= A + \beta (B - A) + \gamma (C - A) \\
&= \underbrace{(1 - \beta - \gamma)} A + \beta B + \gamma C \\
&= \qquad \alpha A + \beta B + \gamma C
\end{aligned}
$$

$$\text{mit } \alpha + \beta + \gamma = 1$$



Das funktioniert auch mit einem Dreieck im $\mathbb{R}^n$; die Zeichnung hier befindet sich dann in der Ebene des Dreiecks!

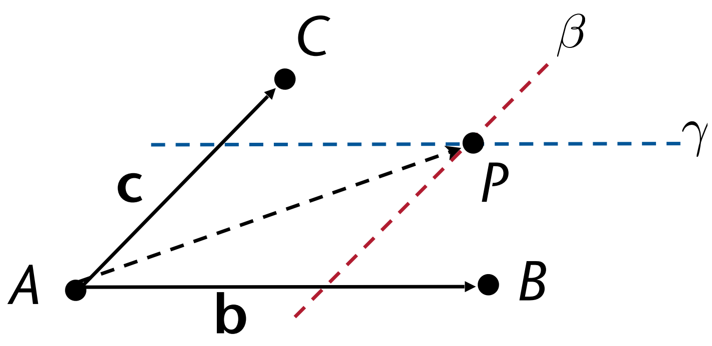
Häufige Aufgabe

- Bestimme die baryzentrischen Koordinaten eines Punktes *P* bzgl. des Dreiecks *A, B, C*

- Lösungsweg 1:
  - Setze $\mathbf{b} = B - A$, $\mathbf{c} = C - A$, $\mathbf{q} = P - A$
  - Ansatz: $\beta\mathbf{b} + \gamma\mathbf{c} \overset{!}{=} \mathbf{q}$
  - Löse das LGS

$$\begin{pmatrix} b_x & c_x \\ b_y & c_y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \beta \\ \gamma \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} q_x \\ q_y \end{pmatrix}$$

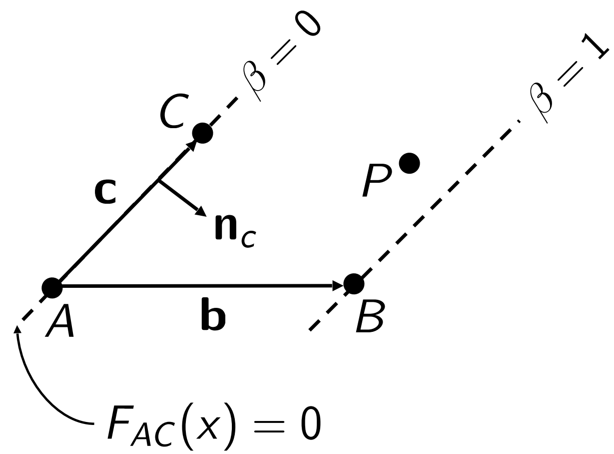
  - Setze $\alpha = 1 - \beta - \gamma$



Lösungsweg 2

- Verwende die Beobachtung: alle Punkte P mit dem selben Abstand von der Geraden $\overline{AC}$ haben dieselbe baryzentrische Koordinate
- Setze

$$F_{AC}(P) := \underbrace{\frac{n_c \cdot (P-A)}{n_c \cdot (B-A)}}_{\text{Normierung}} \qquad n_c := \begin{pmatrix} c_y \\ -c_x \end{pmatrix}$$



- Damit ist $F_{AC}(A) = F_{AC}(C) = 0$,
  und $F_{AC}(B) = 1$ (wegen Normierung)
- Definiere analog F_{AB} und F_{BC}
- Damit ist $\alpha = F_{BC}(P), \beta = F_{AC}(P), \gamma = F_{AB}(P)$

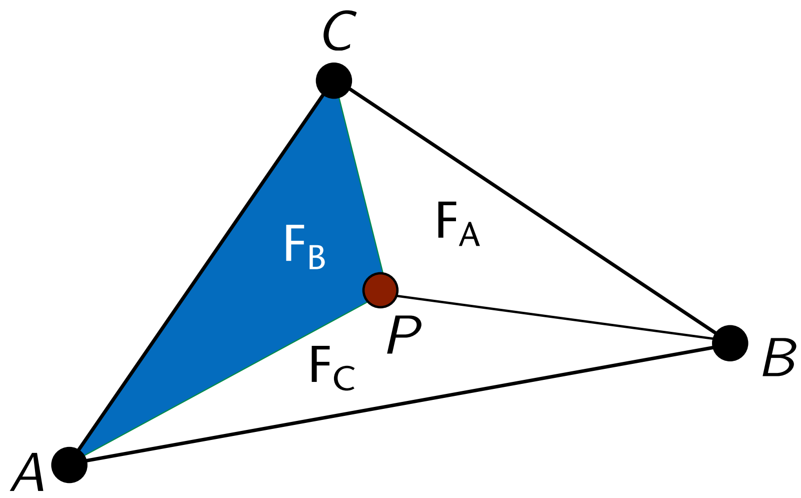
Lösungsweg 3

- Nutze den geometrischen Zusammenhang zwischen Flächeninhalten und baryzentrische Koordinaten:

$$F_A(P) = F(\Delta PBC)$$

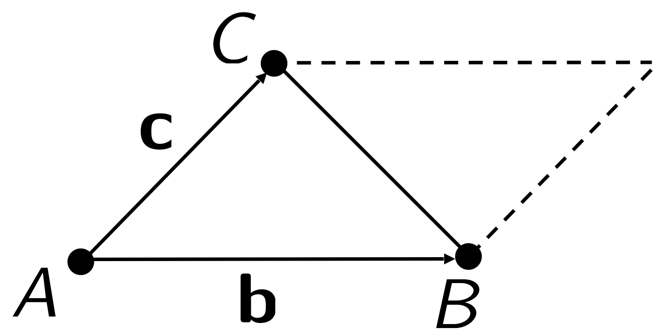
$$F = F_A + F_B + F_C$$

$$\alpha = \frac{F_A}{F} \quad \beta = \frac{F_B}{F} \quad \gamma = \frac{F_C}{F}$$



Erinnerung

- Flächeninhalt eines Dreiecks A, B, C ist



$$\mathcal{A}(\Delta ABC) = \frac{1}{2} \| \mathbf{b} \times \mathbf{c} \|$$

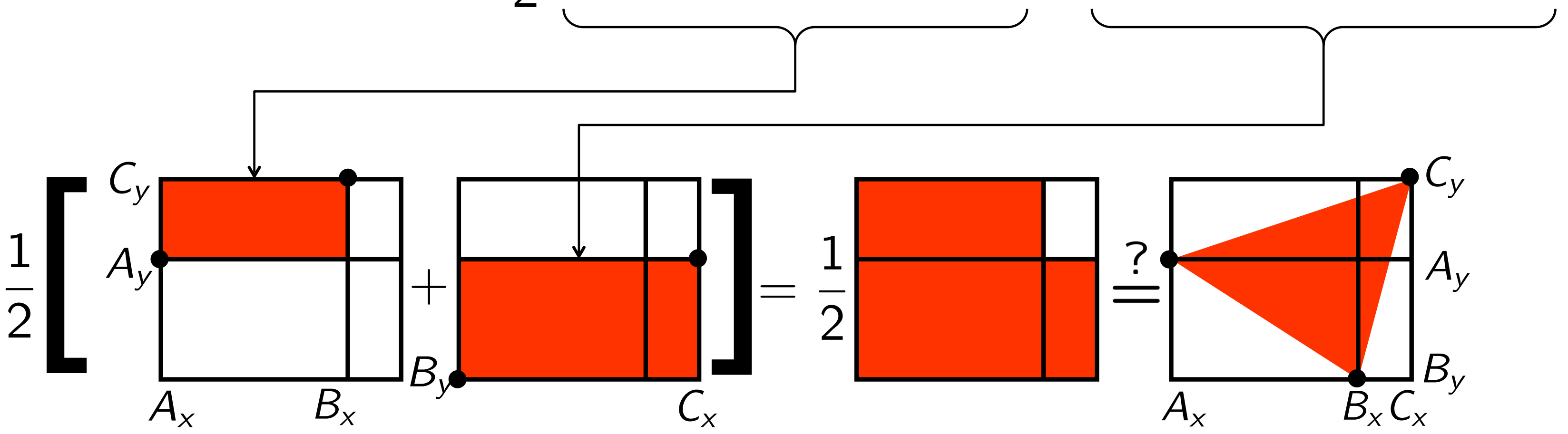
$$= \frac{1}{2} \| (B - A) \times (C - A) \|$$

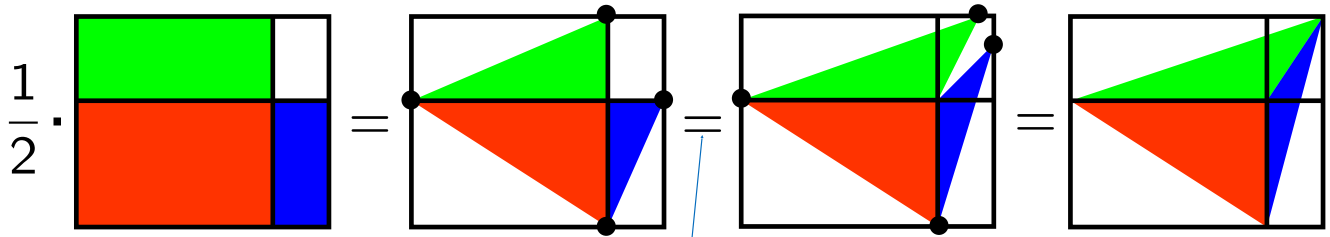
$$= \frac{1}{2} \begin{vmatrix} B_x - A_x & C_x - A_x \\ B_y - A_y & C_y - A_y \end{vmatrix} = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} A_x & B_x & C_x \\ A_y & B_y & C_y \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

- Achtung: Achte auf den korrekten Umlaufsinn !!
- Beobachtung: Flächeninhalt = 0 $\Longleftrightarrow$ Det = 0 $\Longleftrightarrow$ Dreieck ist degeneriert $\Longleftrightarrow$ Punkte sind *nicht* affin unabhängig

Exkurs: Geometrischer Beweis der Flächenformel eines Dreiecks (in 2D!) FYI

- Zu zeigen: $\mathcal{F}(\Delta ABC) = \frac{1}{2}[(B_x - A_x)(C_y - A_y) - (C_x - A_x)(B_y - A_y)]$





denn F(Dreieck) = ½ · Basis · Höhe

Beweis der Lösung 3

- Gegeben sei ein Dreieck *A, B, C*, und darin ein Dreieck *P, Q, R*
- Die baryzentrischen Koordinaten von *P, Q, R* bzgl. *A, B, C* seien

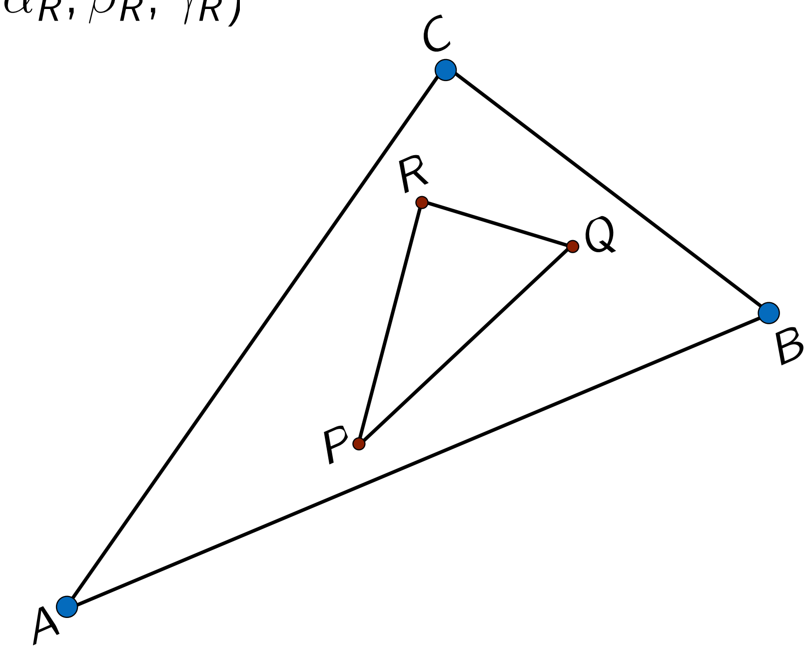
$$P : (\alpha_P, \beta_P, \gamma_P) \quad Q : (\alpha_Q, \beta_Q, \gamma_Q) \quad R : (\alpha_R, \beta_R, \gamma_R)$$

d.h.

$$P = \alpha_P A + \beta_P B + \gamma_P C$$

- Generalized Routh's Theorem:

$$\mathcal{A}(\Delta PQR) = \begin{vmatrix} \alpha_P & \beta_P & \gamma_P \\ \alpha_Q & \beta_Q & \gamma_Q \\ \alpha_R & \beta_R & \gamma_R \end{vmatrix} \cdot \mathcal{A}(\Delta ABC)$$



Beweisskizze für Routh's Theorem

- Zur Erinnerung: Determinanten sind linear, d.h.

$$\begin{vmatrix} \vdots & \vdots & \vdots \\ s\mathbf{a} + t\mathbf{b} & \mathbf{c} & \mathbf{d} \\ \vdots & \vdots & \vdots \end{vmatrix} = s \cdot \begin{vmatrix} \vdots & \vdots & \vdots \\ \mathbf{a} & \mathbf{c} & \mathbf{d} \\ \vdots & \vdots & \vdots \end{vmatrix} + t \cdot \begin{vmatrix} \vdots & \vdots & \vdots \\ \mathbf{b} & \mathbf{c} & \mathbf{d} \\ \vdots & \vdots & \vdots \end{vmatrix}$$

- Damit braucht man $\mathcal{A}(\Delta PQR)$ nur noch ausrechnen:

$$2\mathcal{A}(\Delta PQR) =$$

$$\begin{vmatrix} P_x & Q_x & R_x \\ P_y & Q_y & R_y \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \alpha_P A_x + \beta_P B_x + \gamma_P C_x & \alpha_Q A_x + \beta_Q B_x + \gamma_Q C_x & \alpha_R A_x + \beta_R B_x + \gamma_R C_x \\ \alpha_P A_y + \beta_P B_y + \gamma_P C_y & \alpha_Q A_y + \beta_Q B_y + \gamma_Q C_y & \alpha_R A_y + \beta_R B_y + \gamma_R C_y \\ \underbrace{\alpha_P + \beta_P + \gamma_P}_{1} & \alpha_Q + \beta_Q + \gamma_Q & \alpha_R + \beta_R + \gamma_R \end{vmatrix} \qquad (1)$$

$$= \alpha_P \cdot \begin{vmatrix} A_x & \ldots \text{s. eq. (1)} \ldots & \ldots \\ A_y & \ldots & \ldots \\ 1 & \ldots & \ldots \end{vmatrix} + \beta_P \cdot \begin{vmatrix} B_x & \ldots & \ldots \\ B_y & \ldots & \ldots \\ 1 & \ldots & \ldots \end{vmatrix} + \gamma_P \cdot \begin{vmatrix} C_x & \ldots & \ldots \\ C_y & \ldots & \ldots \\ 1 & \ldots & \ldots \end{vmatrix}$$

$$= \quad \alpha_P \cdot \left(\alpha_Q \underbrace{\begin{vmatrix} A_x & A_x & \ldots \\ A_y & A_y & \ldots \\ 1 & 1 & \ldots \end{vmatrix}}_{0} + \beta_Q \begin{vmatrix} A_x & B_x & \ldots \\ A_y & B_y & \ldots \\ 1 & 1 & \ldots \end{vmatrix} + \gamma_Q \begin{vmatrix} A_x & C_x & \ldots \\ A_y & C_y & \ldots \\ 1 & 1 & \ldots \end{vmatrix} \right)$$

$$+ \beta_P \cdot \left(\alpha_Q \begin{vmatrix} B_x & A_x & \ldots \\ B_y & A_y & \ldots \\ 1 & 1 & \ldots \end{vmatrix} + \beta_Q \underbrace{\begin{vmatrix} B_x & B_x & \ldots \\ B_y & B_y & \ldots \\ 1 & 1 & \ldots \end{vmatrix}}_{0} + \gamma_Q \begin{vmatrix} B_x & C_x & \ldots \\ B_y & C_y & \ldots \\ 1 & 1 & \ldots \end{vmatrix} \right)$$

$$+ \gamma_P \cdot \left(\alpha_Q \begin{vmatrix} C_x & A_x & \ldots \\ C_y & A_y & \ldots \\ 1 & 1 & \ldots \end{vmatrix} + \beta_Q \begin{vmatrix} C_x & B_x & \ldots \\ C_y & B_y & \ldots \\ 1 & 1 & \ldots \end{vmatrix} + \gamma_Q \underbrace{\begin{vmatrix} C_x & C_x & \ldots \\ C_y & C_y & \ldots \\ 1 & 1 & \ldots \end{vmatrix}}_{0} \right) \qquad = \ldots$$

Corollare aus Routh's Theorem

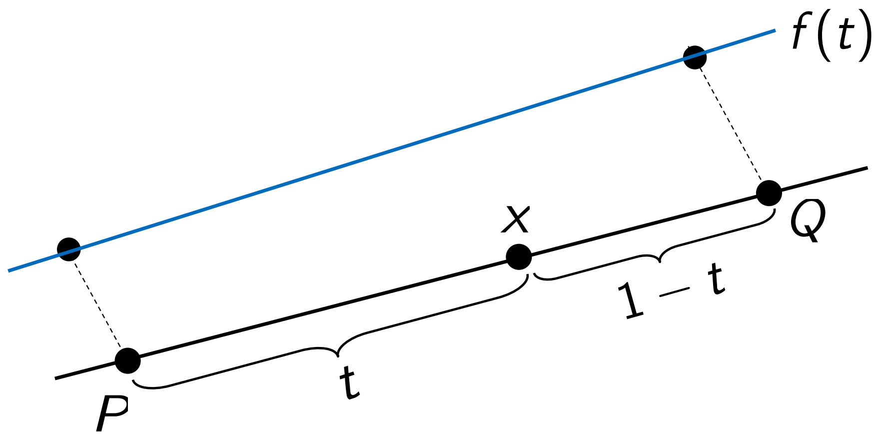
- Corollar 1:
  Gegeben P, Q, R mit ihren jeweiligen baryzentrischn Koordinaten.
  Diese sind kollinear gdw.

$$\begin{vmatrix} \alpha_P & \beta_P & \gamma_P \\ \alpha_Q & \beta_Q & \gamma_Q \\ \alpha_R & \beta_R & \gamma_R \end{vmatrix} = 0$$

- Corollar 2:

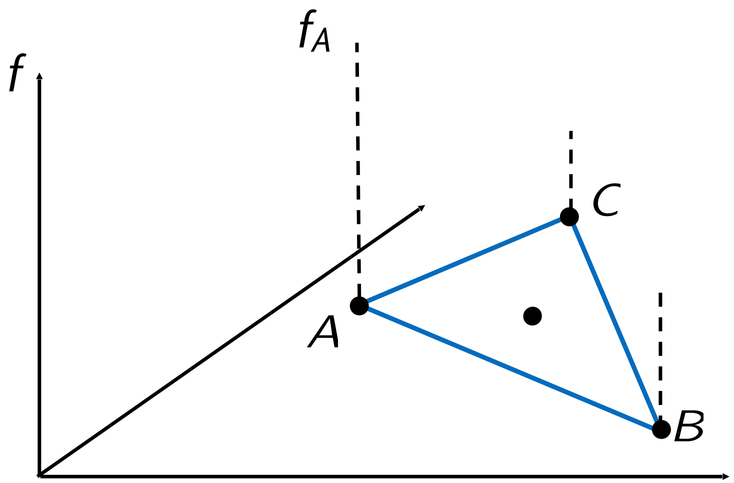
Erinnerung: lineare Interpolation

- Sei ein skalarer Wert an *P* und *Q* vorgegeben: $f(P)=f_1$, $f(Q)=f_2$
- Dann kann man jedem Punkt *X* auf der Geraden $\overline{PQ}$ einen Wert $f(X)$ zuordnen
- Sei *t* der Parameter von *X*, also $X = (1-t) \cdot P + t \cdot Q$
- Dann setze $f(X) = (1-t) \cdot f(P) + t \cdot f(Q)$



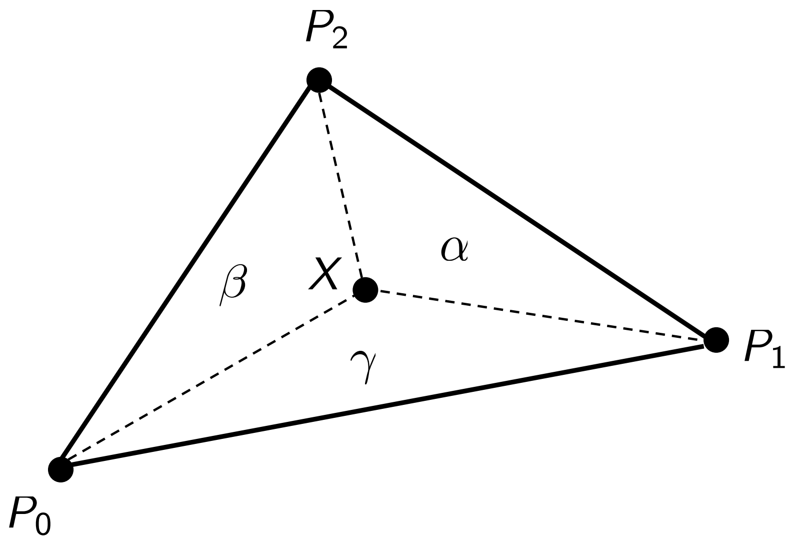
Baryzentrische Interpolation

- Gegeben: "Höhen" f_A, f_B, f_C an den Punkten *A*, *B*, *C* (z.B. *f* = Grauwerte)
- Gesucht: eine Funktion *f*, so daß die f_A, f_B, f_C interpoliert werden
- Idee: für einen beliebigen Punkt X, bestimme dessen baryzentrische Koordinaten, interpoliere damit die Funktionswerte
- Konkret: Sei $X = \alpha A + \beta B + \gamma C$
- Setze $f(X) = \alpha f_A + \beta f_B + \gamma f_C$
- Funktioniert auch für *X* außerhalb ΔABC
- Funktioniert auch für $f_A, f_B, f_C \in \mathbb{R}^m$ (z.B. Farben)
- Bemerkung: Auf den Kanten des Dreiecks entspricht dies gerade einer *linearen Interpolation*



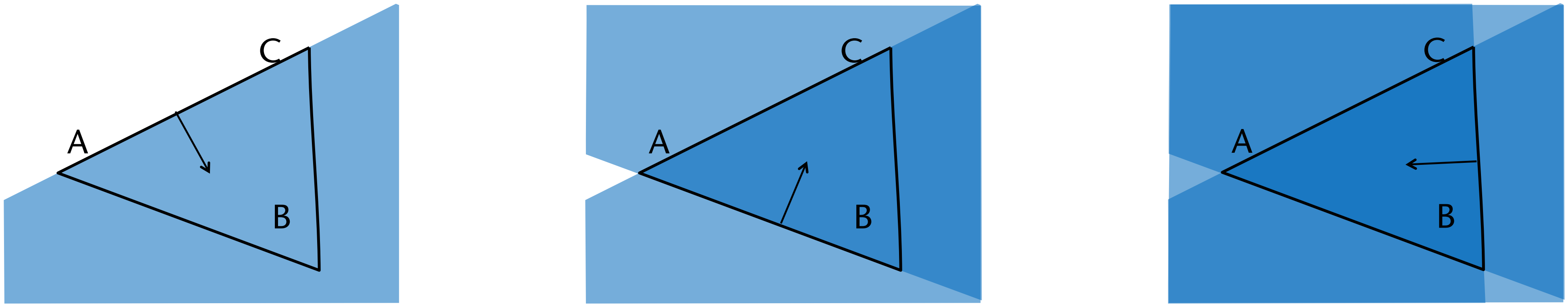
Weitere Anwendung: Punkt–in–Dreieck–Test

- Der Punkt *X* ist im Inneren des Dreiecks $\Leftrightarrow \alpha, \beta, \gamma > 0$



Alternative Betrachtungsweise

- In der Ebene ist ein Dreieck die Schnittmenge von 3 Halbebenen:



$(X - C)\cdot \mathbf{n}_{AC} > 0$ $(X - B)\cdot \mathbf{n}_{AB} > 0$ $(X - A)\cdot \mathbf{n}_{BC} > 0$

Algorithmus von Pineda

[1988]

- Berechne baryzentrische Koordinaten
- Falls innerhalb des Dreiecks: berechn
- Bemerkung: (x_{min}, x_{max}, y_{min}, y_{max}) ist
- Parallelisierung: hier "embarrassingly
  keine Datenabhängigkeit gibt

```
for y = ymin ... ymax:
  for x = xmin ... xmax:
    berechne α, β, γ
    if α > 0 and β > 0 and γ > 0:
      C = αCA + βCB + γCC
      zeichne Pixel (x,y) mit Farbe C
```

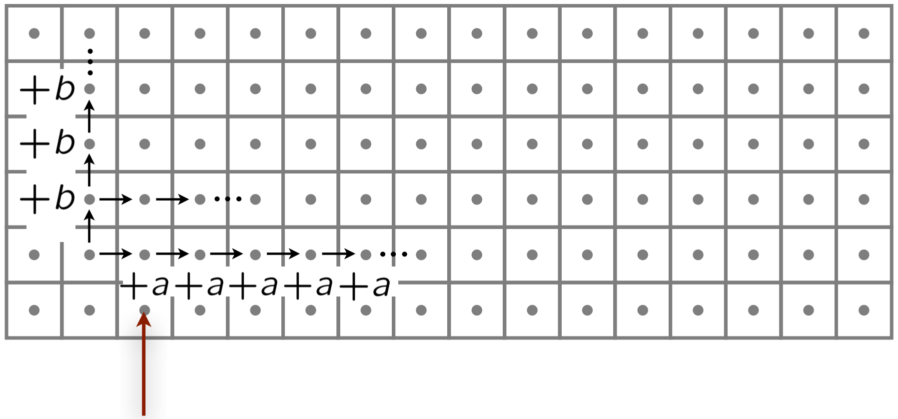
Optimierung im Falle einer sequentiellen Berechnung

- Beobachtung: α ist eine lineare Funktion in der Ebene, m.a.W., α hat die Form

$$\alpha = ax + by + c$$

Dito für β, γ

- Verwende die algorithmische Technik der inkrementellen Berechnung (auf Gitter)

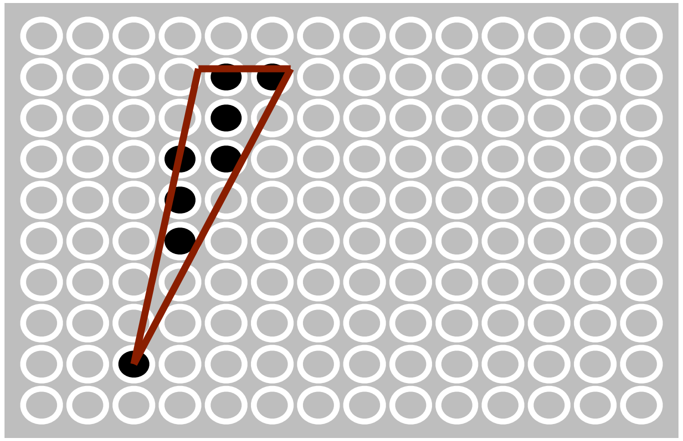


$$\alpha(x+1, y) = \alpha(x, y) + a$$

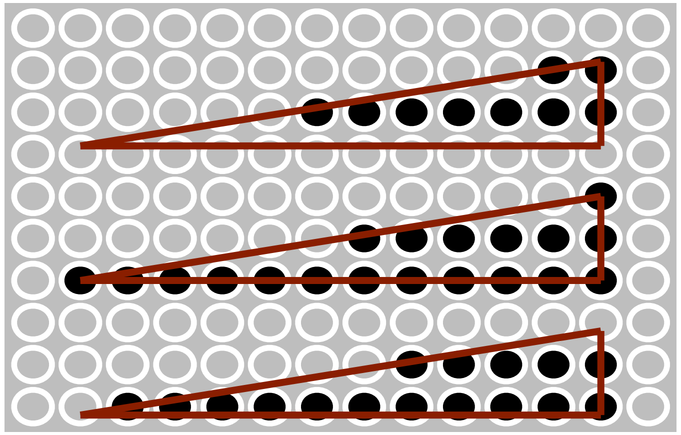
$$\alpha(x, y+1) = \alpha(x, y) + b$$

Problemfall "lange dünne Dreiecke"

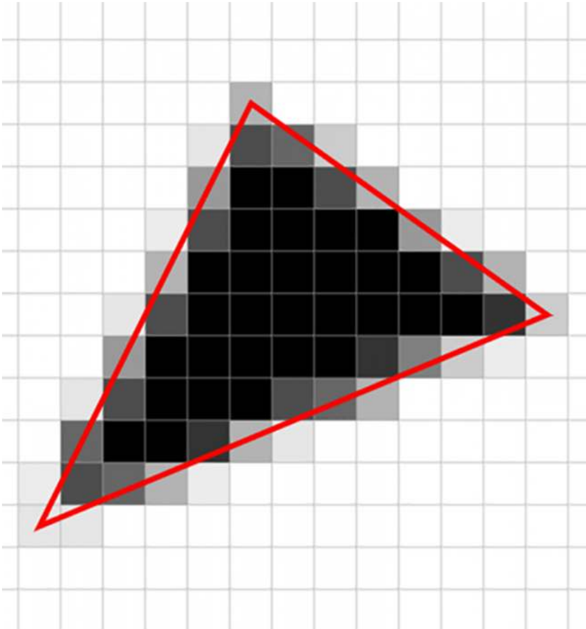
- *Slivers"*:



- *Moving Slivers*:



Lösung: Anti-Aliasing

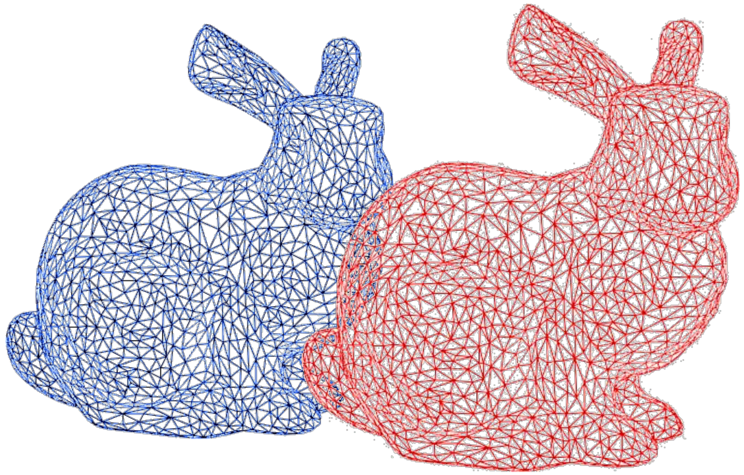


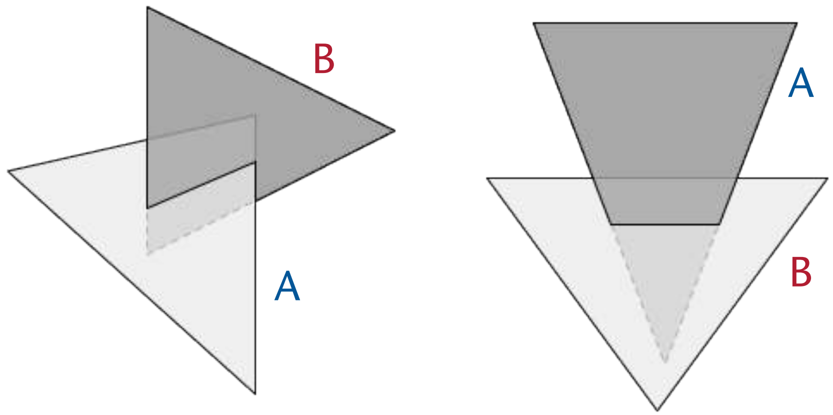
Schätze für jedes Pixel den prozentualen Anteil, zu dem es vom Dreieck überdeckt wird (z.B. durch Super-Sampling)

Anwendung: kürzester Abstand zwischen Punkt und Dreieck

Anwendung: Schnittest Dreieck-Dreieck

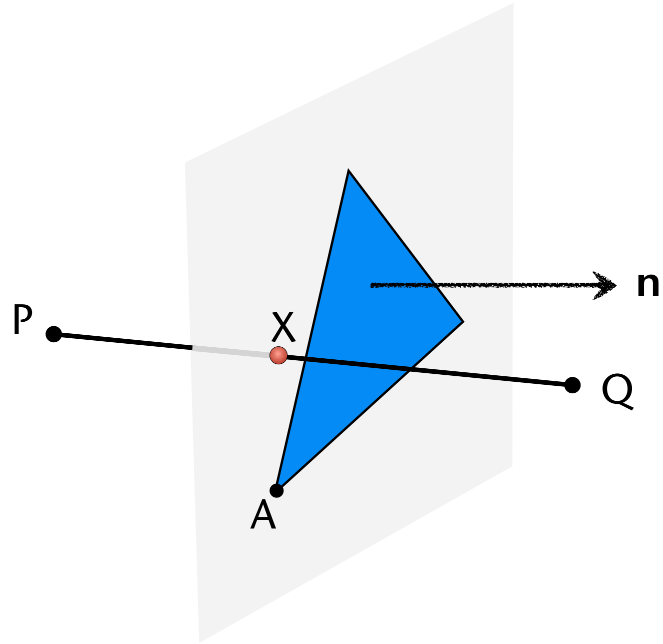
- Das Problem "Collision Detection":
  - Finde ein (oder alle) Paare von Polygonen, die sich schneiden (*witnesses*)
  - Viele pfiffige Verfahren, aber Grundoperation am Ende ist immer ein, bzw. viele Polygon-Polygon-Schnittests
- Vereinfachung: zwei Dreiecke
- Verfahren:
  - Teste alle Kanten von B auf Schnitt gegen A
  - Und nochmal umgekehrt
  - Abbruch, sobald der erste Schnitt gefunden





Schnitt Kante-Dreieck

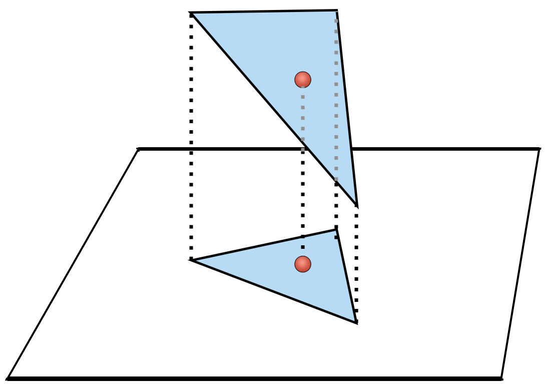
- Ansatz
  - Ebenengleichung: $\mathbf{n} \cdot X - d = 0$
  - Liniengleichung: $X = P + t\mathbf{r}\ , \quad \mathbf{r} = Q - P$



- Einsetzen: $t(\mathbf{n} \cdot \mathbf{r}) - d + \mathbf{n}P = 0$

$$\Rightarrow \ t = \frac{d - \mathbf{n}P}{\mathbf{nr}}$$

  - Check: $t \in [0,1]$; falls nein $\longrightarrow$ kein Schnitt; falls ja $\longrightarrow$ X ausrechnen
  - Teste "X in Dreieck"; falls ja $\longrightarrow$ Schnitt
    - Zum Test, projiziere X und Δ nach 2D



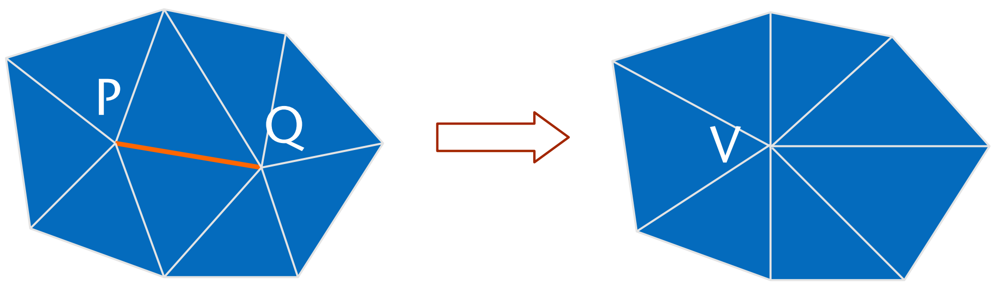
Verallgemeinerung der baryzentrischen Koord. in 3D

- Dreieck $\longrightarrow$ Tetraeder
- Flächenformel $\longrightarrow$ Volumenformel
- Anwendungsbeispiel: Verankerung eines fein aufgelösten Tetraeder-Meshes (für Rendering) in einem grob aufgelösten Tetraeder-Mesh (für FEM-Simulation)

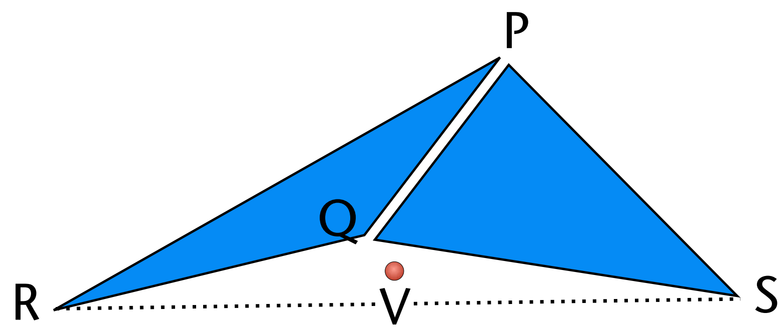
Anwendung: Mesh Simplification

- Ziel: erzeuge "low-poly" Meshes aus gegebenem "high-poly" Input

- Fundamentale Operation: edge collapse



- Position von V wird durch Simplifizierungsalgorithmus bestimmt
- Problem: berechne Farbe (u.a. Attribute) für den neuen Vertex V
  - V liegt *wahrscheinlich* im Inneren des Tetraeders PQRS, aber nicht notwendigerweise
- Lösung:
  - Berechne baryzentrische Koordinaten von V bzgl. P, Q, R, S $\longrightarrow \alpha, \beta, \gamma, \delta$
  - Interpoliere damit die Farben der Ecken
  - Welche Fälle können vorkommen?

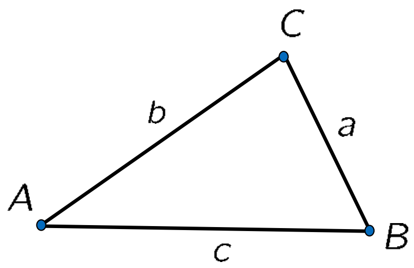


Spezielle Punkte im Dreieck

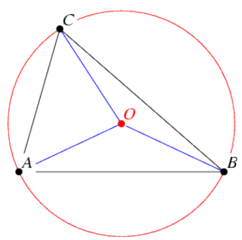
FYI

- Viele spezielle Punkte im Dreieck lassen sich mittels baryzentrischer Koordinaten sehr leicht angeben / ausrechnen
(o. Bew.):

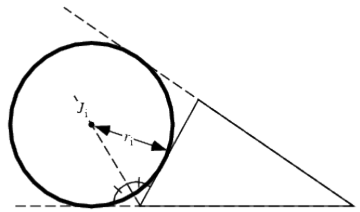
Punkt	α	β	γ
Schwerpkt.	1	1	1
Außenkreis zu A	$-a$	b	c
Inkreis	a	b	c
Umkreis	$a^2(b^2+c^2-a^2)$	$b^2(c^2+a^2-b^2)$	$c^2(a^2+b^2-c^2)$

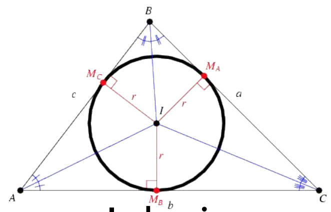


Bezeichnungen



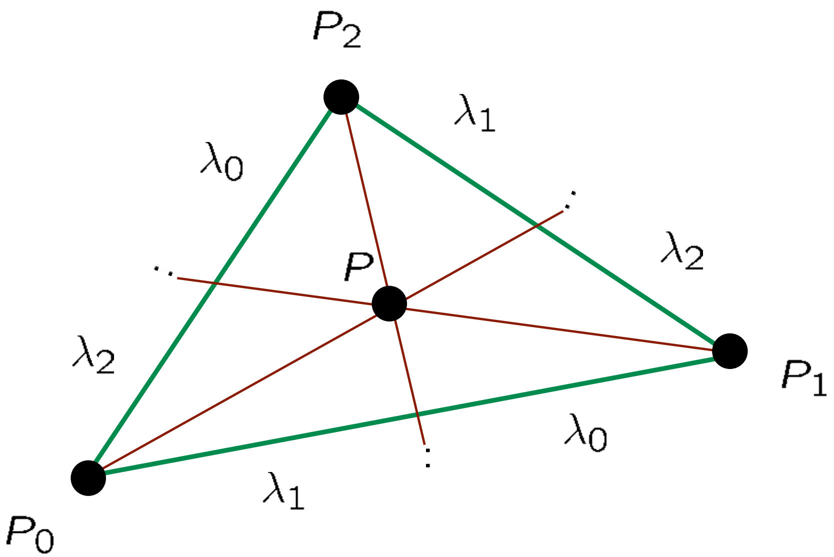
Umkreis

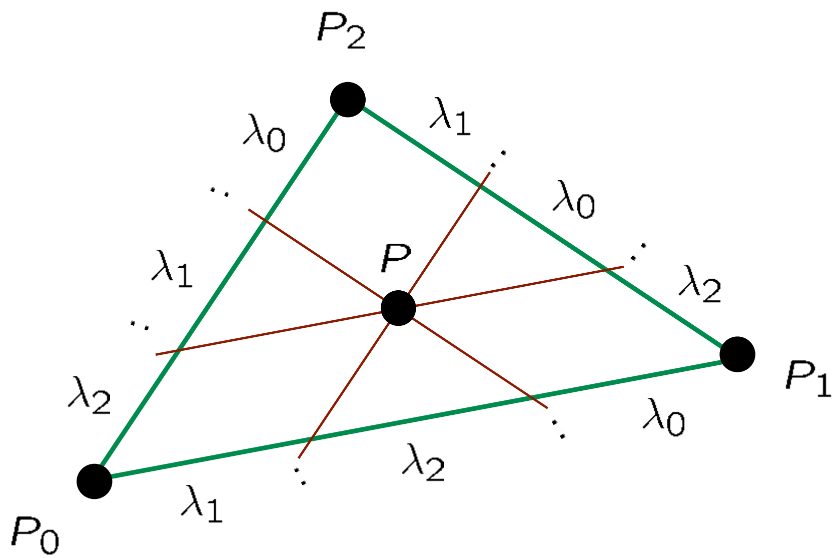

Außenkreis


Inkreis

- Achtung: die Koordinaten sind ohne Normierung angegeben — diese muß man also vor einer tatsächlichen Verwendung noch durchführen!

Geometrische Verhältnisse im Dreieck FYI





S.a. die Links zu Demos auf der VL-Homepage