

Übungsblatt 11

Abgabe: 18.7.06 - 21.7.06

Aufgabe 1 (Memoisierung)

Punkte: 6

Zeigen Sie, daß die Gleichungen

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1} \text{ mit } n > k > 0, \quad \binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1$$

korrekt sind. Schreiben Sie ein Python-Programm, welches unter Verwendung Dynamischer Programmierung die Binomialkoeffizienten $\binom{n}{k}$ basierend auf dieser Gleichung berechnet. Geben Sie die Laufzeit in der \mathcal{O} -Notation abhängig von n und k an.

Aufgabe 2 (Bottom-Up Dyn. Prog.)

Punkte: 6

Gegeben ist ein Text mit n Wörtern (Strings) w_i der Länge (#Zeichen) $l_i := \text{len}(w_i)$. Der Text soll auf ein Blatt Papier so ausgedruckt werden, daß am rechten Rand möglichst wenig Leerzeichen übrig bleiben. In eine Zeile des Blattes passen M Zeichen. Zwischen 2 Wörter innerhalb einer Zeile steht immer ein Leerzeichen. In der m -ten Zeile, in der die Wörter w_i bis w_j stehen, ist die Anzahl der am rechten Rand verbleibenden Leerzeichen $\alpha_m := M - ((j - i) + \sum_{k=i}^j l_k)$, wenn $i < j$. Die Anzahl der Leerzeichen in der letzten Zeile werden nicht berücksichtigt. Zu minimieren ist $\sum_{i=1}^{m-1} \alpha_m$.

Zeigen Sie, daß die 4 Grundprinzipien der dynamischen Programmierung auf dieses Problem anwendbar sind. Geben Sie einen Dyn.-Prog.-Algorithmus an, welcher obiges Problem löst. Analysieren Sie Laufzeit und Speicherverbrauch Ihres Algorithmus.

Aufgabe 3 (Stapelfahrerproblem)

Punkte: 6

In einem Lager werden Pakete zusammengestellt mit Waren, die an verschiedenen Plätzen (grüne Kästchen) gelagert sind. Dazu fährt ein Staplerfahrer mit dem Paket die einzelnen Lagerplätze an und packt die Ware in das Paket. Er startet bei Punkt A und beendet seine Tour in Punkt B. Der Fahrer kann durch einen Gang durchfahren oder im Gang wenden und am gleichen Ende wieder hinausfahren. Zu ermitteln ist der kürzeste Weg von A nach B, so daß alle Pakete aus den n Gängen abgeholt werden. In der Abbildung 1 (hier $n = 3$) ist ein möglicher (nicht notwendigerweise kürzester) Weg eingezeichnet, den der Fahrer nehmen könnte. Im ersten und zweiten Gang wendet er, durch den dritten Gang fährt er durch. Geben Sie ein auf Dynamischer Programmierung basierendes Verfahren an, welches diesen kürzesten Weg berechnet. Eine Beschreibung des Verfahrens reicht hier aus, Pseudo-Code ist nicht erforderlich.

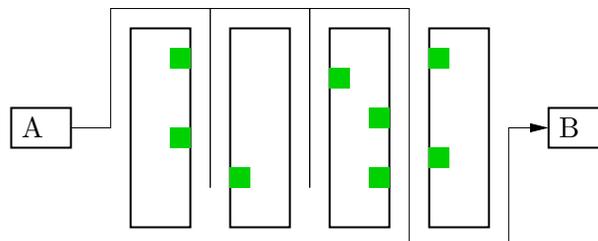


Abb. 1

Lösungshinweis: Um das Problem vom Startpunkt bis zum Zielpunkt (Gang n) zu lösen betrachtet man die Teilprobleme: kürzeste Weg vom Startpunkt bis Gang i (d.h. Gang 1 bis i sind abgefahren), ($i \leq n$). Zur Berechnung des kürzesten Weges von Startpunkt A bis zu Gang i sind vier mögliche Fälle zu betrachten. Der Fahrer kann nach Abfahren von Gang i am oberen oder am unteren Ende hinausfahren. Für jeden der beiden Möglichkeiten kann er am Startpunkt A am oberen oder unteren Ende gestartet sein.

Z.B. ist der kürzeste Weg vom Startpunkt A bis Gang i , wenn der Fahrer am oberen Ende rausfährt entweder

der kürzere der Wege aus Abb. a und b

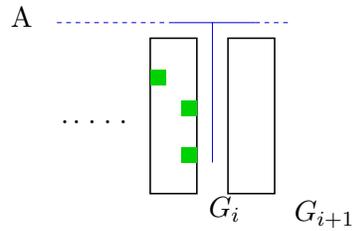


Abb. a

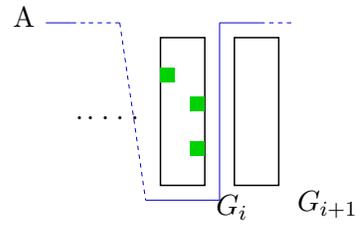


Abb. b

oder der kürzere der Wege aus Abb. c und d

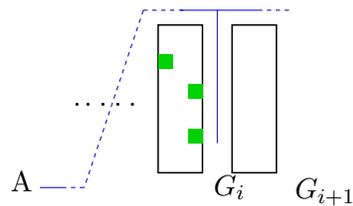


Abb. c

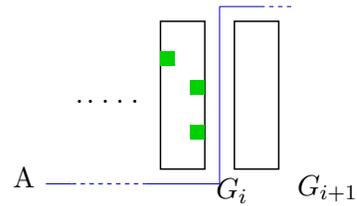


Abb. d

Die Überlegung, wenn der Fahrer am unteren Ende nach Gang i hinausfährt, ist analog.