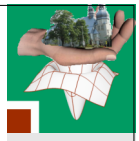


Informatik I
Komplexität von Algorithmen

G. Zachmann
Clausthal University, Germany
zach@in.tu-clausthal.de

Leistungsverhalten von Algorithmen

- Speicherplatzkomplexität: Wird primärer & sekundärer Speicherplatz effizient genutzt?
- Laufzeitkomplexität: Steht die Laufzeit im akzeptablen / vernünftigen / optimalen Verhältnis zur Aufgabe?
- Theorie: liefert untere Schranke, die für jeden Algorithmus gilt, der das Problem löst.
- Spezieller Algorithmus liefert obere Schranke für die Lösung des Problems.
- Erforschung von oberen und unteren Schranken:
  Effiziente Algorithmen und Komplexitätstheorie (Zweige der Theoretischen Informatik)

Laufzeit

- Definition:
  Die Laufzeit $T(x)$ eines Algorithmus A bei Eingabe x ist definiert als die Anzahl von Basisoperationen, die Algorithmus A zur Berechnung der Lösung bei Eingabe x benötigt.
  - Laufzeit = Funktion der Größe der Eingabe
  - Definition für Eingabegröße ist abhängig vom Problem

Laufzeitanalyse

- Sei P ein gegebenes Programm und x Eingabe für P, |x| Länge von x, und $T_p(x)$ die Laufzeit von P auf x.
- Beschreibe Aufwand eines Algorithmus als Funktion der Größe des Inputs (kann verschieden gemessen werden):
  $T_p(n)$ = Laufzeit des Programms P für Eingaben der Länge n
- Der beste Fall (best case): Oft leicht zu bestimmen, kommt in der Praxis jedoch selten vor:

$$T_P(n) = \inf\{ T_P(x) \mid |x| = n, \text{x Eingabe für P}\}$$

- Der schlechteste Fall (worse case): Liefert garantierte Schranken, meist *relativ* leicht zu bestimmen. Oft zu pessimistisch:

$$T_P(n) = \sup\{ T_P(x) \mid |x| = n, \text{x Eingabe für P}\}$$

Kostenmaße

- Einheitskostenmaß: Annahme, jedes Datenelement belegt unabhängig von seiner Größe denselben Speicherplatz (in Einheitsgröße).
  - Damit: Größe der Eingabe bestimmt durch Anzahl der Datenelemente
  - Beispiel: Sortierproblem
- Logarithmisches Kostenmaß (Bit-Komplexität): Annahme, jedes Datenelement belegt einen von seiner Größe (logarithmisch) abhängigen Platz
  - Größe der Eingabe bestimmt durch die Summe der Größen der Elemente
  - Erinnerung: für n>0 ist die # Bits zur Darstellung von n = $\lceil \log_2(n+1) \rceil$
  - Beispiel: Zerlegung einer gegebenen großen Zahl in Primfaktoren
- Ab jetzt immer Einheitskostenmaß

Beispiel Minimum-Suche

- Eingabe : Folge von n Zahlen (a_1, a_2, … , a_n).
- Ausgabe : Index i, so daß $a_i \leq a_j$ für alle Indizes $1 \leq j \leq n$.
- Beispiel:
  - Eingabe: 31, 41, 59, 26, 51, 48
  - Ausgabe: 4

```
def min(A):
    min = 1
    for j in range( 2, len(A) ):
        if A[j] < A[min]:
            min = j
```

	Kosten	Anzahl
`def min(A):`		
`  min = 0`	c_1	1
`  for j in range( 1, len(A) ):`	c_2	n – 1
`    if A[j] < A[min]:`	c_3	n – 1
`      min = j`	c_4	n-1

- Zusammen: Zeit

$$T(n) = c_1 + (n-1)\cdot(c_2 + c_3 + c_4) \leq \bar{c}\cdot n$$

  - Eingabegröße = Größe des Arrays

Weiteres Beispiel für Aufwandsberechnung

- Wir betrachten folgende Funktion f1, die $1! \cdot 2! \cdots (n\text{-}2)! \cdot (n\text{-}1)!$ berechnet

```
def f1(n):
  r = 1
  while n > 0 :
      i = 1
      while i < n:
          r *= i
          i += 1
      n -= 1
  return r
```

n	Z(n)	V(n)	M(n)	I(n)
1	2	2	0	1
2	3	5	1	1
3	5	3	1	3
4	8	6	3	6
5	12	10	6	10
6	17	15	10	15
7	23	21	15	21
8	30	28	21	28
9	38	36	28	36
10	47	45	36	45

- Exakte Bestimmung des Aufwandes:
  - M = Anzahl Mult, I = Anzahl Inkr.,
    V = Anzahl Vergleiche, Z = Anzahl Zuweisungen

- Anzahl Mult M(n)

$$M(n) = (n-1) + M(n-1) = (n-1) + (n-2) + M(n-2)$$
$$= \sum_{k=1}^{n-1} k = \frac{(n-1)(n-2)}{2}$$

- Anzahl der Inkrementierungen: $I(n) = n + M(n+1)$, woraus folgt:

$$I(n) = \frac{n(n+1)}{2}$$

- Die Anzahl der Vergleiche

$$V(n) = I(n+1) = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$$

- Die Anzahl benötigter Zuweisungen Z(n) ist gleich

$$Z(n) = 1 + n + I(n) = 1 + \frac{n(n+3)}{2}$$

```
r = 1
while n > 0 :
    i = 1
    while i < n:
        r *= i
        i += 1
    n -= 1
return r
```


Rechenmodell / Algorithmisches Modell

- Für eine präzise mathematische Laufzeitanalyse benötigen wir ein Rechenmodell, das definiert
  - Welche Operationen zulässig sind.
  - Welche Datentypen es gibt.
  - Wie Daten gespeichert werden.
  - Wie viel Zeit Operationen auf bestimmten Daten benötigen.
- Formal ist ein solches Rechenmodell gegeben durch die Random Accsess Maschine (RAM).
  - RAMs sind Idealisierung von 1-Prozessorrechner mit einfachem aber unbegrenzt großem Speicher.

Basisoperationen und deren Kosten

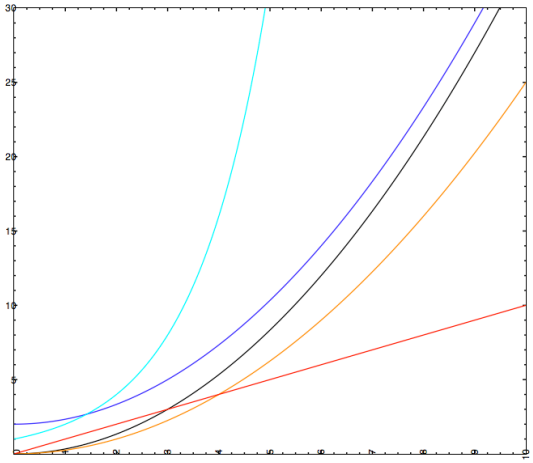
- *Definition* : Als Basisoperationen bezeichnen wir
  - Arithmetische Operationen – Addition, Multiplikation,Division, Ab-, Aufrunden, auf Zahlen fester Länger (z.B 64 Bit = Double);
  - Datenverwaltung – Laden, Speichern, Kopieren von Datensätzen fester Größe;
  - Kontrolloperationen – Verzweigungen, Sprünge, Funktionsaufruf.
- Kosten: Zur Vereinfachung nehmen wir an, daß jede dieser Operationen bei allen Operanden gleich viel Zeit benötigt (im Einheitskostenmaß)
  - Überwiegend unabhängig von der verwendeten Programmiersprache
  - Ablesbar aus Pseudocode oder Programmstück
  - Exakte Definition ist nicht bedeutend

Beispiele

- einen Ausdruck auswerten
- einer Variablen einen Wert zuweisen
- Indizierung in einem Array
- Aufrufen einer Methode / Funktion mit Parametern
- Verlassen einer Methode / Funktion

Beispiel für Wachstum von Funktionen

$$f_1(n) = \frac{1}{3}n^2,$$
$$f_2(n) = \frac{1}{4}n^2,$$
$$f_3(n) = n,$$
$$f_4(n) = \frac{1}{3}n^2 + 2,$$
$$f_5(n) = 2^n.$$



Funktionenklassen

- Ziel:
  Konstante Summanden und Faktoren dürfen bei der Aufwandsbestimmung vernachlässigt werden.
- Gründe:
  - Man ist an asymptotischem Verhalten für große Eingaben interessiert
  - Genaue Analyse kann technisch oft sehr aufwendig oder unmöglich sein
  - Lineare Beschleunigungen sind ohnehin immer möglich (schnellere Hardware)
- Idee:
  - Komplexitätsmessungen mit Hilfe von Funktionenklassen. Etwa *O(f)* sind die Funktionen, die (höchstens) in der Größenordnung von *f* sind.
- Groß-O-Notation:
  Mit O-, Ω- und Θ-Notation sollen obere, untere bzw. genaue Schranken für das Wachstum von Funktionen beschrieben werden.

"Groß-O"

- Sei $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}_{\geq 0}$
- Definition Groß-O: Die Ordnung von f (*the order of f*) ist die Menge

$$O(f(n)) = \{t : \mathbb{N} \to \mathbb{R}_{\geq 0} \mid \exists c \in \mathbb{R}_{\geq 0}\, \exists n_0 \in \mathbb{N}\, \forall n \geq n_0 : t(n) \leq c \cdot f(n)\}$$

- Definition Groß-Omega: die Menge Ω ist wie folgt definiert:

$$\Omega(f(n)) = \{t : \mathbb{N} \to \mathbb{R}_{\geq 0} \mid \exists c \in \mathbb{R}_{\geq 0}\, \exists n_0 \in \mathbb{N}\, \forall n \geq n_0 : t(n) \geq c \cdot f(n)\}$$

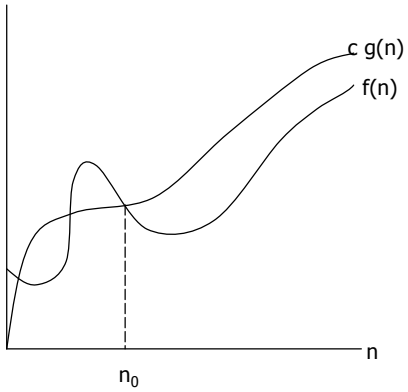
- Definition Groß-Theta: Die exakte Ordnung Θ von f(n) ist definiert als:

$$\Theta(f(n)) = O(f(n)) \cap \Omega(f(n))$$

- Terminologie: O, Ω, Θ, heißen manchmal auch Landau'sche Symbole

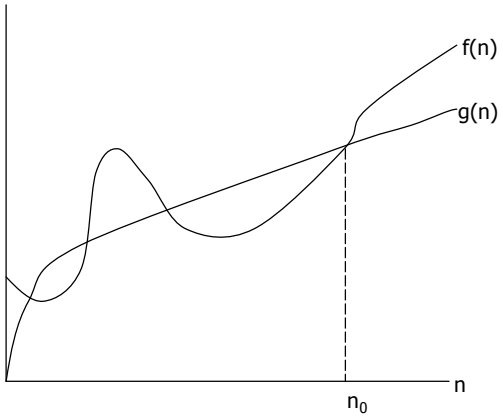
Veranschaulichung der O-Notation

- Die Funktion f gehört zur Menge $O(g)$, wenn es positive Konstante c, n_0 gibt, so daß $f(n)$ ab n_0 unterhalb $cg(n)$ liegt



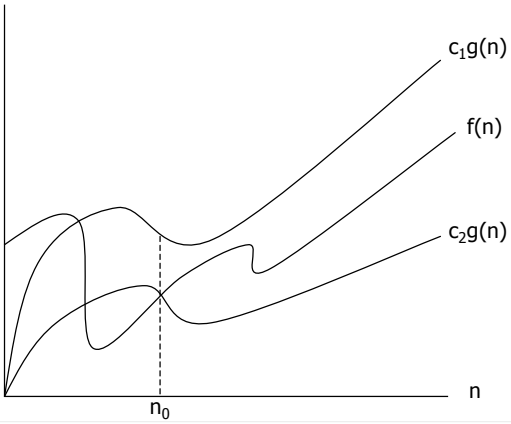
Veranschaulichung der Ω -Notation

- Die Funktion f gehört zur Menge $O(g)$, wenn es positive Konstante c, n_0 gibt, so daß $f(n)$ ab n_0 unterhalb $cg(n)$ liegt



Veranschaulichung der Θ-Notation

- Die Funktion f gehört zur Menge $\Theta(g)$, wenn es positive Konstante c_1, c_2, und n_0 gibt, so daß $f(n)$ ab n_0 zwischen $c_1 g(n)$ und $c_2 g(n)$ "eingepackt" werden kann



Bemerkungen zu den O-Notationen

- In manchen Quellen findet man leicht abweichende Definitionen, etwa
  $O(g) = \{f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}^+ |$ es gibt positive Konstanten a und b mit $f(n) \leq ag(n) + b$ für alle n$\}$
- Für die relevantesten Funktionen f (etwa die monoton steigenden f nicht kongruent 0) sind diese Definitionen äquivalent.
- Schreibweise (leider) oft : $f = O(g)$ statt $f \in O(g)$
- Minimalität: Die angegebene Größenordnung muß nicht minimal gewählt sein
- Asymptotik: Wie groß n_0 ist bleibt unklar (kann sehr groß sein)
- „Verborgene Konstanten": Die Konstanten c und n_0 haben für kleine n großen Einfluß.

Beispiel Min-Search

- Behauptung: unser Minimum-Search-Algo besitzt Laufzeit Θ(n).
- Erinnerung:
  $T(n) \approx c_1 \cdot n + c_2$

```
def min(A):
  min = 1
  for j in range (2, len(A)):
    if A[j] < A[min]:
      min = j
```

- Zum Beweis ist zu zeigen:
  1. Es gibt ein c_2 und n_2, so daß die Laufzeit von Min–Search bei allen Eingaben der Größe $n \geq n_2$ immer höchstens $c_2 n$ ist. (Groß–O)
  2. Es gibt ein c_1 und n_1, so daß für alle $n \geq n_1$ eine Eingabe der Größe n existiert, bei der Min–Search mindestens Laufzeit $c_1 n$ besitzt. (Omega)

Beispiele zu Funktionsklassen

- Ist $n^2 \in O(n^3)$?
  - Gesucht: $c \in \mathbb{R}^+$ und $n_0 \in \mathbb{N}$, so daß Bed. erfüllt,
    also $\forall n > n_0 : n^2 \leq cn^3$

    $\Leftrightarrow 1 \leq c \cdot n \Leftrightarrow n \geq \frac{1}{c}$

    Wähle $c = 1, n_0 = 1$
- Ist $n^3 \in O(n^2)$?
  - Gesucht: $c \in \mathbb{R}^+, n_0 \in \mathbb{N}$, so daß $\forall n > n_0 : n^3 \leq cn^2$

    $\Leftrightarrow \exists c \in \mathbb{R}^+, n_0 \in \mathbb{N}\ \forall n > n_0 : n \leq c$

    Widerspruch!
- $f(n) = n \log n \notin O(n)$

Der Groß-O-Kalkül

- Zunächst ein paar einfache "Rechen"-Regeln:

$$f \in O(f)$$
$$O(O(f)) = O(f)$$
$$k \cdot O(f) = O(k \cdot f) = O(f) \text{ für konstantes k}$$
$$O(f) + k = O(f + k) = O(f) \text{ für konstantes k}$$

Additionsregel

- Lemma, Teil 1: Für beliebige Funktionen f und g gilt:

$$f + g \in O(f + g) = O(\max(f, g))$$

- Zu beweisen: nur das rechte "="
- Zu beweisen: jede der beiden Mengen ist jeweils in der anderen Menge enhalten

"$\subseteq$": Sei $t(n) \in O(f(n) + g(n)) \Rightarrow$

$$\exists c \in \mathbb{R}^+, n_0 \in \mathbb{N}\ \forall n \geq n_0 : t(n) \leq c \cdot (f(n) + g(n))$$

Abschätzung nach oben:

$c \cdot (f(n) + g(n)) \leq c \cdot 2 \cdot max\{f(n), g(n)\}$

Mit $\bar{c} = 2 \cdot c$ gilt $t(n) \leq \bar{c} \cdot max\{f(n), g(n)\}$

Also ist $t(n) \in O(max\{f(n), g(n)\})$

"$\supseteq$": Sei $t(n) \in O(\max\{f(n), g(n)\})$

$$\exists c \in \mathbb{R}^+, n_0 \in \mathbb{N}_0\ \forall n \geq n_0 : t(n) \leq c \cdot \max\{f(n), g(n)\}$$

Abschätzung nach oben:

$max\{f(n), g(n)\} \leq f(n) + g(n)$

Also ist Bedingung für $t \in O(f(n) + g(n))$
mit denselben c, n_0 erfüllt

- Lemma, Teil 2: Für beliebige Funktionen f und g gilt:

$$O(f)+O(g)=O(f+g)$$

- Additionsregel findet Anwendung bei der Berechnung der Komplexität, wenn Programmteile hintereinander ausgeführt werden.

Multiplikationsregel

- Lemma: Für beliebige Funktionen f und g gilt:

$$f \cdot g \in O(f \cdot g)=O(f)\cdot O(g)$$

- Multiplikationsregel findet Anwendung bei der Berechnung der Komplexität, wenn Programmteile ineinander geschachtelt werden (Schleifen)

Teilmengenbeziehungen

- Lemma: Es gelten die folgenden Aussagen:
  1. $O(f) \subseteq O(g) \Leftrightarrow f \in O(g)$
  2. $O(f) = O(g) \Leftrightarrow f \in O(g)$ und $g \in O(f)$
  3. $O(f) \subset O(g) \Leftrightarrow f \in O(g)$ und $g \notin O(f)$
- Beweis von Teil 1:
  1. " $\Rightarrow$ " : trivial
  2. " $\Leftarrow$ " : $f(n) \in O(g(n))$.

     Also $\exists c \in \mathbb{R}^+, n_0 \in \mathbb{N}\ \forall n \geq n_0 : f(n) \leq c \cdot g(n)$

     Zu zeigen: jedes $t(n) \in O(f(n))$ ist auch in $O(g(n))$

     Sei also $t(n) \in O(f(n))$.

     Per Def gilt $\exists c' \in \mathbb{R}^+, n_0' \in \mathbb{N}\ \forall n \geq n_0' : t(n) \leq c' f(n)$

     Wähle $\bar{n_0} = \max\{n_0, n_0'\}$ und $\bar{c} = c \cdot c'$

     Damit gilt $t(n) \leq \bar{c} \cdot g(n)$

     Also $t(n) \in O(g(n))$

- Teil 2 & 3 : analog

Transitivität von Groß–O

- Lemma: Falls $f(n) \in O(g(n))$ und $g(n) \in O(h(n))$,
  dann ist $f(n) \in O(h(n))$.

- Beweis:
  Sei $f(n) \in O(g(n))$ und $g(n) \in O(h(n))$

  $\Rightarrow \quad \exists c', c'' \in \mathbb{R}^+, n_0', n_0'' \in \mathbb{N}\ \forall n \geq \max\{n_0', n_0''\}:$
  $f(n) \leq c' \cdot g(n) \leq c' \cdot c'' \cdot h(n)$

  $\Rightarrow$ Behauptung

Einfache Beziehungen

- Lemma: Für alle $m \in \mathbb{N}$ gilt

  $$O(n^m) \subseteq O(n^{m+1}).$$

  - Beweis: Übung

- Satz: Sei $p(n) := a_m n^m + a_{m-1} n^{m-1} + \ldots + a_1 n + a_0$, wobei $a_i \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ für 0 ≤ i ≤ m.
  Dann gilt $p(n) \in O(n^m)$.

- Insbesondere: Es seien p_1 und p_2 Polynome vom Grad d_1 bzw. d_2, wobei die Koeffizienten vor n^{d1} und n^{d2} positiv sind.
  Dann gilt:

  a) $p_1 \in \Theta(p_2) \Leftrightarrow d_1 = d_2$
  b) $p_1 \in O(p_2) \Leftrightarrow d_1 \leq d_2$
  c) $p_1 \in \Omega(p_2) \Leftrightarrow d_1 \geq d_2$

- Für alle k, k fest, gilt: $n^k \in O(2^n)$
- Für alle k > 0 und ϵ > 0 gilt: $\log^k n \in O(n^\epsilon)$
- $2^{n/2} \in O(2^n)$
- Für beliebige positive Zahlen *a, b* $\neq$ 1 gilt:

$$f(n) = \log_a n \in O(\log_b n)$$

  - Insbesondere:

$$O(\log_b n) = O(\log_2 n)$$

  - Beweis: Übungsaufgabe. (Gleichzeitig ein Beleg, daß die Analysis-Vorlesung Anwendung hat.)

- Bemerkung: Groß–O definiert keine totale Ordnungsrelation auf der Menge aller Funktionen $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$
- Beweis: Es gibt positive Funktionen f und g so, daß

  $f(n) \notin O(g(n))$ und auch $g(n) \notin O(f(n))$.

  Wähle zum Beispiel $f(n) = \sin(n) + 1$ und

  $g(n) = \cos(n) + 1$.

- Definition "polynomielle Zeit" :
  wir sagen, ein Algorithmus A mit Komplexität f(n) braucht höchstens polynomielle Rechenzeit (*polynomial time*), falls es ein Polynom P(n) gibt, so daß $f(n) \in O(P(n))$. A braucht höchstens exponentielle Rechenzeit (*exponential time*), falls es eine Konstante $a \in \mathbb{R}^+$ gibt, so daß $f(n) \in O(a^n)$.

Beweishilfe

Lemma: Es gilt:

$$(1) \quad \lim_{n\to\infty} \frac{f(n)}{g(n)} = c, c > 0 \Rightarrow O(f(n)) = O(g(n))$$

$$(2) \quad \lim_{n\to\infty} \frac{f(n)}{g(n)} = 0 \Rightarrow O(f(n)) \subset O(g(n))$$

Insbesondere hat man dann in Fall (1): $f(n) \in \Theta(g(n))$

Wie überprüft man diesen Limes?

Satz 7.44. (3. Regel von de l'Hôpital: "$x \to \infty$") *Seien f und g auf dem Intervall $[a, \infty[$ differenzierbar und es gelte $\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} g(x) = 0$ (bzw. $= \infty$). Es existiere $\lim_{x\to\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)} =: L$. Dann existiert auch $\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)}$ und ist gleich L. Kurz:*

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)}.$$

Hierarchie von Größenordnungen

Größenordnung	Name
$O(1)$	konstante Funktionen
$O(\log n)$	logarithmische Funktionen
$O(\log^2 n)$	quadratisch logarithmische Funktionen
$O(n)$	lineare Funktionen
$O(n \log n)$	n log n - wachsende Funktionen
$O(n^2)$	quadratische Funktionen
$O(n^3)$	kubische Funktionen
$O(n^k)$	polynomielle Funktionen (k konstant)

f heißt polynomiell beschränkt ,
wenn es ein Polynom p mit $f \in O(p)$ gibt.

f wächst exponentiell , wenn es ein $k > 0$ gibt mit $f \in \Theta(k^n)$.

Skalierbarkeiten

- Annahme: 1 Rechenschritt ≙ 0.001 Sekunden → Maximale Eingabelänge bei gegebener Rechenzeit:

Laufzeit T(n)	1 Sekunde	1 Minute	1 Stunde
n	1000	60000	3600000
$n \log n$	140	4895	204094
n^2	31	244	1897
n^3	10	39	153
2^n	9	15	21

- Annahme: Wir können einen 10-fach schnelleren Rechner verwenden → Statt eines Problems der Größe p kann in gleicher Zeit dann berechnet werden:

Laufzeit T(n)	neue Problemgröße	
n	$10p$	
$n \log n$	fast $10p$	$\approx 10 \frac{\ln(p)}{LambertW(10 p \ln(p))} p$
n^2	$3.16p$	$\approx \sqrt{10} p$
n^3	$2.15p$	$\approx \sqrt[3]{10} p$
2^n	$3.32 + p$	$\approx \log 10 + p$

Allg. Bestimmung des Zeitaufwands mit Groß-O

- Sei A ein Programmstück, dann ist Zeitaufwand T(A) im Fall:
  - A ist einfache Anweisung oder arithm./log. Ausdruck →
    $T(A) = const \in O(1)$
  - A ist Folge von Anweisungen → Additionsregel anwenden
  - A ist `if`-Anweisung →
    (a) `if cond: B` → T(A) = T(cond) + T(B)
    (b) `if cond: B else: C` → T(A) = T(cond) + max(T(B), T(C))
  - A ist eine Schleife (while, for, …) →

$$T(A) = \sum_{\text{Umlauf i}} T(\text{Anweisungen i}) + T(\text{Terminierungsbedingung i})$$

oft einfach

$$T(A) = \#\text{Umläufe} \cdot \left(T(\text{Anweisungen}) + T(\text{Terminierungsbedingung})\right)$$

  - A ist Rekursion → später

Beispiele zur Laufzeitabschätzung

Problem: *prefixAverages1(X)*

Eingabe**:** Ein Array X von n Zahlen

Ausgabe: Ein Array A von Zahlen, so daß gilt: A[i] ist das arithmetische Mittel der Zahlen X[0], …, X[i]

Algorithmus :

```
for i in range(0,n):
    a = 0                          → O(1)
    for j in range(0,i+1):
        a += X[j]                  → O(1)
    A[i] = a / (i + 1)             → O(1)
return A
```

i:O(1) = O(i) ⊆ O(n), da i ≤ n

O(1)+O(1)+O(n) = O(n+2) = O(n)

n·O(n) = O(n²)

Exkurs

- Das eben gestellte Problem kann man auch effizienter lösen

Algorithmus *prefixAverages2(X)*

```
s = 0.0
for i in range(0,n):
    s += X[i]
    A[i] = s / (i + 1)
return A
```

O(1)

n·O(1) = O(n)

Average-Case-Komplexität

- Nicht leicht zu handhaben, für die Praxis jedoch relevant
- Sei $p_n(x)$ Wahrscheinlichkeitsverteilung, mit der Eingabe x mit Länge n auftritt
- Mittlere (erwartete) Laufzeit:

$$\bar{T}(n) = \sum_{x,\ |x|=n} T(x) p_n(x)$$

- Wichtig:
  - Worüber wird gemittelt ?
  - Sind alle Eingaben der Länge n gleichwahrscheinlich ?
- Oft: Annahme der Gleichverteilung aller Eingaben x der Länge n
  - Dann ist $p_n(x) \equiv 1/N$, N = Anzahl aller mögl. Eingaben der Länge n

$$\bar{T}(n) = \frac{1}{N} \sum_{x,\ |x|=n} T(x)$$

Beispiel

- Taktzahl (Anzahl Bitwechsel) eines seriellen Addierers bei Addition von 1 zu einer in Binärdarstellung gegebenen Zahl i der Länge n, d.h. $0 \leq i \leq 2^{n-1}$.
- Sie beträgt 1 plus der Anzahl der Einsen am Ende der Binärdarstellung von i.
- Worst Case: n + 1 Takte
  - Beispiel: Addition von 1 zu 111. . . 1.
- Average Case:
  - Wir nehmen eine Gleichverteilung auf der Eingabemenge an.
  - Es gibt 2^{n-k} Eingaben der Form (x,..., x, 0, 1,..., 1) wobei k-1 Einsen am Ende stehen.
  - Hinzu kommt die Eingabe $i = 2^n-1$, für die das Addierwerk n+1 Takte benötigt.

- Die *average-case Rechenzeit* $\bar{T}(n)$ beträgt also:

$$\bar{T}(n) = \frac{1}{2^n}\left((n+1) + \sum_{1 \leq k \leq n} 2^{n-k} k\right)$$

- Es ist

$$\begin{aligned}\sum_{1 \leq k \leq n} 2^{n-k} k &= n2^{n-n} + \ldots + 2 \cdot 2^{n-2} + 1 \cdot 2^{n-1} \\ &= \quad 2^0 + \ldots + 2^{n-3} + 2^{n-2} + 2^{n-1} \\ &\quad + 2^0 + \ldots + 2^{n-3} + 2^{n-2} \\ &\quad + 2^0 + \ldots + 2^{n-3} \\ &\quad \vdots \\ &\quad + 2^0 \\ &= (2^n - 1) + \ldots + (2^1 - 1) \\ &= 2^{n+1} - 2 - n\end{aligned}$$

- Demnach ist

$$\bar{T}(n) = 2^{-n}(2^{n+1} - 2 - n + (n+1)) = 2 - 2^{-n}$$

- Es genügen also im Durchschnitt 2 Takte, um eine Addition von 1 durchzuführen.