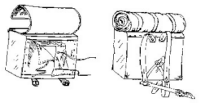
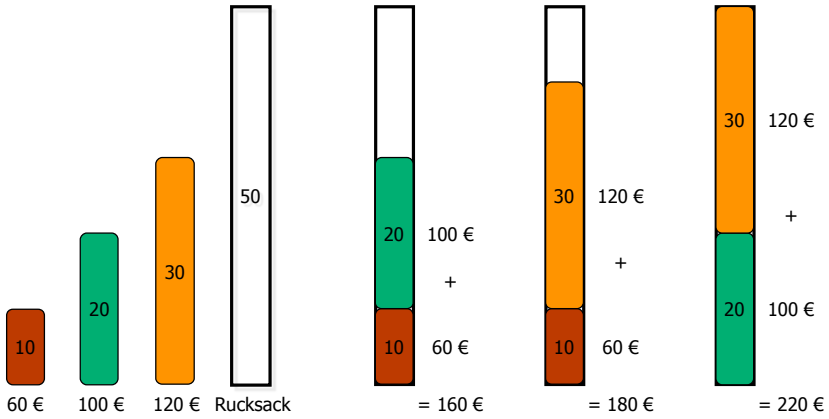
Das Rucksack-Problem



- Englisch: *Knapsack Problem*
- Das Problem:
  - "Die Qual der Wahl"
  - Ein Dieb raubt einen Laden aus; um möglichst flexibel zu sein, hat er für die Beute nur einen Rucksack dabei
  - Im Ladens findet er n Gegenstände;
    der i-te Gegenstand hat den Wert v_i und das Gewicht w_i
  - Sein Rucksack kann höchstens das Gewicht c tragen
  - w_i und c sind ganze Zahlen (v_i können aus $\mathbb{R}^+$ sein)
- Welche Gegenstände sollten für den maximalen Profit gewählt werden?

Beispiel



- Fazit:
  - Keine gute Strategie ist es, das Objekt mit bestem Profit/Gewicht als erstes zu wählen

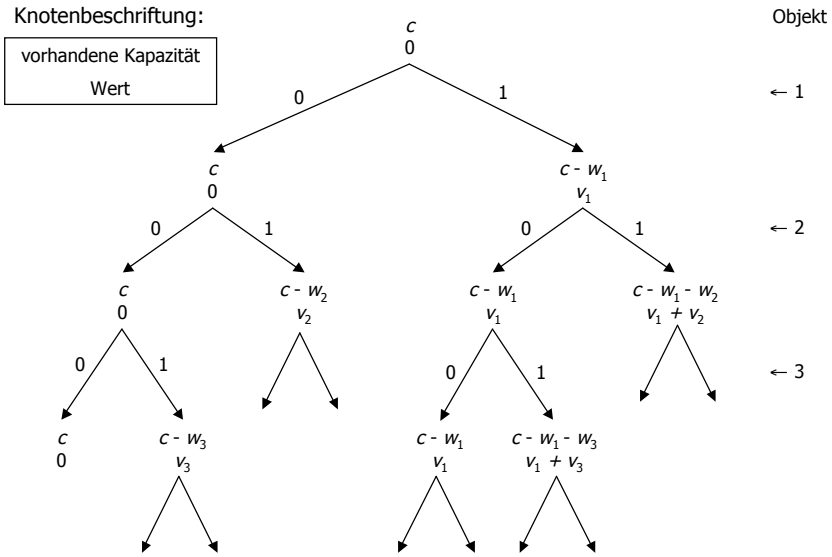
- Fractional Knapsack Problem:
  - Dieb kann Teile der Gegenstände mitnehmen
  - Lösungsalgo später (Greedy-Strategie)
- 0-1-Knapsack-Problem:
  - Binäre Entscheidung zwischen 0 und 1: jeder Gegenstand wird vollständig genommen oder gar nicht
- Formale Problemstellung:
  - x_i = 1/0 :⇔ Gegenstand i ist (nicht) im Rucksack

$$\text{maximiere} \quad \sum_{i=1}^{n} v_i x_i \qquad \text{(gesamter Profit)}$$

$$\text{unter der Bedinung} \quad \sum_{i=1}^{n} w_i x_i \leq c \qquad \text{(Gewichtsbedingung)}$$

Rekursive Lösung

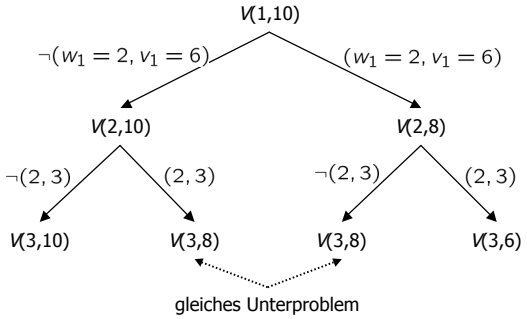
- Betrachte den ersten Gegenstand *i*=1; zwei Möglichkeiten:
  1. Der Gegenstand wird in Rucksack gepackt (x_0=1);
     Rest-Problem:
     $$\text{maximiere} \sum_{i=2}^{n} v_i x_i \quad \text{wobei} \sum_{i=2}^{n} w_i x_i \leq c - w_1$$
  2. Der Gegenstand wird nicht in Rucksack gepackt (x_0=0);
     Rest-Problem:
     $$\text{maximiere} \sum_{i=2}^{n} v_i x_i \quad \text{wobei} \sum_{i=2}^{n} w_i x_i \leq c$$
- Berechne beide Fälle, wähle den besseren



- Sei $V(i,k)$ der maximal mögliche Wert für die Gegenstände i, i+1, …, n bei gegebener max. Kapazität k
- $V(i,k)$ kann dann für $i \le n$ geschrieben werden als

$$V(i,k) = \begin{cases} 0 & i = n \wedge w_n > k \\ v_n & i = n \wedge w_n \le k \\ V(i+1,k) & i < n \wedge w_i > k \\ \max \left\{ \begin{array}{l} V(i+1,k), \\ v_i + V(i+1, k-w_i) \end{array} \right\} & i < n \wedge w_i \le k \end{cases}$$

- Algorithmus, basierend auf diesen 4 Fällen, hat Laufzeit von $O(2^n)$
- Ist ineffizient, denn $V(i,k)$ wird für die gleichen i und k mehrmals berechnet
- Beispiel: $n = 5$, $c = 10$, $w = (2, 2, 6, 5, 4)$, $v = (6, 3, 5, 4, 6)$



Lösung mittels Dynamischer Programmierung

- Ineffizienz kann vermieden werden, indem alle $V(i,k)$, einmal berechnet, in einer Tabelle gespeichert werden
- Die Tabelle wird in der Reihenfolge $i = n, n\text{-}1, \ldots, 2, 1$ für $1 \le k \le c$ gefüllt

k	1	2	…	j-1	j	j+1	…	c
$V(n, k)$	0	0	…	0	v_n	v_n	…	v_n

j ist das erste k mit $w_n \le k$

Beispiel

$n = 5,\ c = 10,\ w = (2, 2, 6, 5, 4),\ v = (2, 3, 5, 4, 6)$

i \ k	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
5	0	0	0	0	6	6	6	6	6	6	6
4	0	0	0	0	6	6	6	6	6	10	10
3	0	0	0	0	6	6	6	6	6	10	11
2	0	0	3	3	6	6	9	9	9	10	11
1	0	0	3	3	6	6	9	9	11	11	11

+4, +4, +5, +3, +2, +2

$n = 5,\ c = 10,\ w = (2, 2, 6, 5, 4),\ v = (2, 3, 5, 4, 6)$

x = [0,0,1,0,1] oder x = [1,1,0,0,1]

i \ k	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
5	0	0	0	0	6	6	6	6	6	6	6
4	0	0	0	0	6	6	6	6	6	10	10
3	0	0	0	0	6	6	6	6	6	10	11
2	0	0	3	3	6	6	9	9	9	10	11
1	0	0	3	3	6	6	9	9	11	11	11

Bemerkungen

- Aufwand: $O(n \cdot c)$, c = Kapazität des Rucksacks
- Achtung: dieser Algorithmus klappt nur, wenn c und die w_i Integers sind!
- Falls c oder die w_i keine Integers sind, dann ist das Problem "NP-vollständig", und es gibt (wahrscheinlich) keinen polynomiellen Algorithmus

Längste gemeinsame Teilfolge

- Seien $X = (x_1, \ldots, x_m)$ und $Y = (y_1, \ldots, y_n)$ zwei Folgen, wobei $x_i, y_i \in A$ für ein endliches Alphabet A, dann heißt Y Teilfolge von X, wenn es aufsteigend sortierte Indizes $i_1, \ldots, i_n$ gibt, mit $x_{i_j} = y_j$ für $j = 1, \ldots, n$
- Beispiel: Y = BCAC ist Teilfolge von X = ABACABC, wähle $(i_1, i_2, i_3, i_4) = (2,4,5,7)$
- Sind X, Y, Z Folgen über A, so heißt Z gemeinsame Teilfolge von X und Y, wenn Z Teilfolge sowohl von X als auch Y ist
- Beispiel: Z = BCAC ist gemeinsame Teilfolge von X = ABACABC und Y = BACCABBC

- Z heißt längste gemeinsame Teilfolge von X und Y, wenn Z gemeinsame Teilfolge von X und Y ist und es keine andere gemeinsame Teilfolge von X und Y gibt, die größere Länge als Z besitzt
- Beispiel: Z = BCAC ist nicht längste gemeinsame Teilfolge von X =ABACABC und Y = BACCABBC, denn BACAC ist eine längere gemeinsame Teilfolge von X und Y
- Beim Problem Längste-Gemeinsame-Teilfolge (*longest-common-subsequence problem*, LCSP) sind als Eingabe zwei Folgen $X = (x_1, \ldots, x_m)$ und $Y = (y_1, \ldots, y_n)$ gegeben, gesucht ist eine längste gemeinsame Teilfolge X und Y
- Anwendung: "Distanz" zwischen Strings messen
  - z.B.: DNA-Analyse, "ungefährer" String-Vergleich

Naïver Algorithmus

- Für jede mögliche Unterfolge von X:
  prüfe ob es eine Unterfolge von Y ist
- Laufzeit: $\Theta(n\, 2^m)$
  - Es gibt 2^m mögliche Unterfolgen von X zu überprüfen
  - Für jede Unterfolge wird Zeit $\Theta(n)$ benötigt, um Y zu überprüfen:
    - "scanne" Y, "verbrauche" jeweils den nächsten Buchstaben von X, falls er passt
    - X ist Unterfolge von Y, wenn am Ende von Y kein Zeichen von X mehr übrig ist

Struktur des LCSP

- Definition: sei $X = (x_1, \ldots, x_m)$ eine beliebige Folge, für $i = 0, 1, \ldots, m$ ist der i-te Präfix von X definiert als $X_i = (x_1, \ldots, x_i)$. Der i-te Präfix von X besteht also aus den ersten i Symbolen von X, der 0-te Präfix ist die leere Folge.
- Satz: seien $X = (x_1, \ldots, x_m)$ und $Y = (y_1, \ldots, y_n)$ beliebige Folgen und sei $Z = (z_1, \ldots, z_k)$ eine längste gemeinsame Teilfolge von X und Y, dann gilt:
  1. ist $x_m = y_n$, dann ist $z_k = x_m = y_n$ und Z_{k-1} ist eine längste gemeinsame Teilfolge von X_{m-1} und Y_{n-1}
  2. ist $x_m \neq y_n$ und $z_k \neq x_m$, dann ist Z eine längste gemeinsame Teilfolge von X_{m-1} und Y
  3. ist $x_m \neq y_n$ und $z_k \neq y_n$, dann ist Z eine längste gemeinsame Teilfolge von X und Y_{n-1}

Beweis

- Fall 1 ($x_m = y_n$):
  - Jede gemeinsame Teilfolge Z', die nicht mit $z'_l = x_m = y_n$ endet, kann verlängert werden, indem $x_m = y_n$ angefügt wird ⇒
  - die LCS Z muß mit $x_m = y_n$ enden
  - Z_{k-1} ist längste gemeinsame Teilfolge von X_{m-1} und Y_{n-1}, denn
  - es gibt keine längere gemeinsame Teilfolge von X_{m-1} und Y_{n-1}, oder Z wäre keine längste gemeinsame Teilfolge
- Fall 2 ($x_m \neq y_n$ und $z_k \neq x_m$):
  - Da Z nicht mit x_m endet ⇒
  - Z ist gemeinsame Teilfolge von X_{m-1} und Y und
  - daher keine längere gemeinsame Teilfolge von X_{m-1} und Y, oder Z wäre keine längste gemeinsame Teilfolge

Rekursion für Länge von LCS

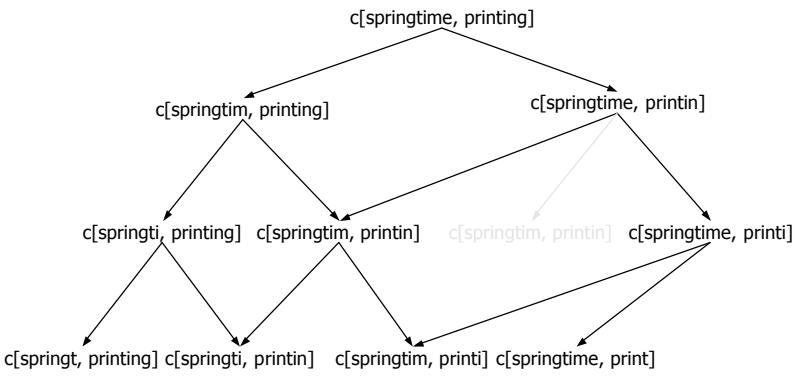
- Lemma: Sei $c[i,j]$ die Länge einer längsten gemeinsamen Teilfolge des i-ten Präfix X_i von X und des j-ten Präfix Y_j von Y, dann gilt

$$c[i,j] = \begin{cases} 0 & \text{falls } i = 0 \vee j = 0 \\ c[i-1, j-1] + 1 & \text{falls } i,j > 0 \wedge x_i = y_j \\ \max\{c[i-1,j], c[i,j-1]\} & \text{falls } i,j > 0 \wedge x_i \neq y_j \end{cases}$$

- Beobachtung:
  - rekursive Berechnung der $c[m,n]$ würde immer wieder zur Berechnung derselben Werte führen
  - berechnen daher die Werte $c[i,j]$ iterativ "von unten nach oben", z.B. zeilenweise
  - $b[i,j]$ speichert Informationen zur späteren Konstruktion einer längsten gemeinsamen Teilfolge

Beispiel

$$c[\alpha,\beta] = \begin{cases} 0 & \text{falls } \alpha \text{ leer oder } \beta \text{ leer} \\ c[\text{präfix}\alpha, \text{präfix}\beta] + 1 & \text{falls end}(\alpha) = \text{end}(\beta) \\ \max\{c[\text{präfix}\alpha, \beta], c[\alpha, \text{präfix}\beta]\} & \text{falls end}(\alpha) \neq \text{end}(\beta) \end{cases}$$



Berechnung der Werte $c[i,j]$

```
def lcs_length( x,y ):
    for i in range( 0, len(x) ):
        c[i,0] = 0
    for j in range( 0, len(y) ):
        c[0,y] = 0
    for i in range( 1, len(x) ):
        for j in range( 1, len(y) ):
            if x[i] = y[j]:
                c[i,j] = c[i-1,j-1]+1
                b[i,j] = "NW"
            else:
                if c[i-1,j] >= c[i,j-1]:
                    c[i,j] = c[i-1,j]
                    b[i,j] = "N"
                else:
                    c[i,j] = c[i,j-1]
                    b[i,j] = "W"
    return b,c
```


Beispieltabellen $c[i,j]$ und $b[i,j]$

	j	0	1	2	3	4	5	6
i		y_j	B	D	C	A	B	A
0	x_i	0	0	0	0	0	0	0
1	A	0	↑ 0	↑ 0	↑ 0	↖ 1	← 1	↖ 1
2	B	0	↖ 1	← 1	← 1	↑ 1	↖ 2	← 2
3	C	0	↑ 1	↑ 1	↖ 2	← 2	↑ 2	↑ 2
4	B	0	↖ 1	↑ 2	↑ 2	↑ 2	↖ 3	← 3
5	D	0	↑ 1	↖ 2	↑ 2	↑ 3	↑ 3	↑ 3
6	A	0	↑ 1	↑ 2	↑ 2	↖ 3	↑ 3	↖ 4
7	B	0	↖ 1	↑ 2	↑ 2	↑ 3	↖ 4	↑ 4

b c

Laufzeiten

- Lemma: der Algorithmus lcs_length hat die Laufzeit $O(nm)$, wenn die Folgen X, Y die Längen n und m haben.

Verwandte Probleme

- Es gibt viele Probleme, die sehr ähnlich zum LCSP sind
- Editier-Distanz (anderes Maß für den Abstand/Distanz 2er Strings):
  - Gegeben 2 Strings A, B
  - Aufgabe: welches ist die minimale Folge von elementaren Editieroperationen, um A in B zu überführen?
  - Zugelassene Operationen: Zeichen löschen, einfügen, ersetzen
- Approximative Stringsuche:
  - Gegeben Text T und String S
  - Finde dasjenige Teilstück $T[i:j]$, das am ähnlichsten zu S ist (von allen anderen Teilstücken $T[i':j']$)
  - Anwendungen: DNA-Sequence-Alignment, u.a.

Memoisierung (Top-down-Ansatz)

- "Memo" = Gedächtnis
- Üblicherweise ist Formulierung der optimalen Lösung rekursiv, aber Algorithmus geht bottom-up vor
- *Memoization* [sic] = Technik in der dynamischen Programmierung, falls Bottom-up-Ansatz nicht klar
- Notizblock-Methode zur Beschleunigung einer rekursiven Problemlösung:
  - Algo bleibt rekursiv
  - Ein Teilproblem wird nur beim ersten Auftreten gelöst
  - Die Lösung wird in einer Tabelle gespeichert und bei jedem späteren Auftreten desselben Teilproblems (d.h., rekursiver Aufruf mit denselben Parametern) wird die Lösung (ohne erneute Rechnung!) in der Tabelle nachgesehen

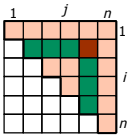
Beispiel: MCMP mittels Memoisierung

```
def mcm_mem_rek( p,i,j ):
    if i = j:
        return 0
    if m[i,j] < ∞ :                # check first,
        return m[i,j]              # if already computed
    for k in range( i,j ):
        q = p[i-1]*p[k]*p[j] + mcm_rek(p,i,k) + \
            mcm_rek(p,k+1,j)
        if q < m[i,j]:
            m[i,j] = q
    return m[i,j]

def mcm_mem( p ):
    for i in range( 1, len(p)+1 ):
        for j in range( 1, len(p)+1 ):
          m = ∞                              # z.B. 2147483647
    return mcm_mem_rek( p,1,len(p)-1 )
```

Aufwand

- Behauptung: Zur Berechnung aller Einträge $m[i,j]$ mit Hilfe von mcm_mem_rek genügen insgesamt $O(n^3)$ Schritte
- Beweis:



  - $O(n^2)$ Einträge
  - jedes Element $m[i,j]$ wird einmal eingetragen
  - jeder Eintrag $m[i,j]$ wird zur Berechnung von weniger als $2n$ weiteren Einträgen $m[i',j']$ herangezogen, wobei $i = i' \wedge j < j'$ oder $i > i' \wedge j = j'$
- Bemerkungen zum MCMP
  - Es gibt einen Algorithmus mit linearer Laufzeit $O(n)$, der eine Klammerung mit Multiplikationsaufwand $\leq 1.155 \cdot M_{opt}$ findet
  - Es gibt einen Algorithmus mit Laufzeit $O(n \log n)$, der eine optimale Klammerung findet

Zusammenfassung

- Dynamische Programmierung = Algorithmenentwurfstechnik, die oft bei Optimierungsproblemen angewandt wird
  - Man muß eine Menge von Entscheidungen treffen, die Bedingungen unterliegen, um eine optimale (min/max) Lösung zu erlangen
  - Es kann verschiedenen Lösungswege geben
- Allgemein einsetzbar bei rekursiven Verfahren, wenn Teillösungen (von Unterproblemen) mehrfach benötigt werden
- Lösungsansatz: Tabellieren von Teilergebnissen
- Vorteil: Laufzeitverbesserungen, oft polynomiell statt exponentiell

Zwei verschiedene Ansätze

- Bottom-up
  - \+ kontrollierte effiziente Tabellenverwaltung, spart Zeit
  - \+ spezielle optimierte Berechnungsreihenfolge, spart Platz
  - \- weitgehende Umcodierung des Originalprogramms erforderlich
  - \- möglicherweise Berechnung nicht benötigter Werte
- Top-down (Memoisierung, Notizblockmethode)
  - \+ Originalprogramm wird nur gering oder nicht verändert
  - \+ nur tatsächlich benötigte Werte werden berechnet
  - \- eventuell unnötige rekursive Aufrufe
  - \- Tabellengröße oft nicht optimal