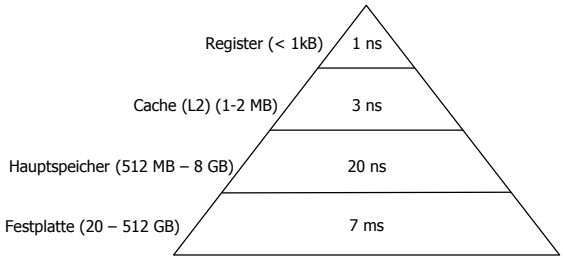
Mehrwegbäume — Motivation

- Wir haben gute Strukturen (AVL-Bäume) kennen gelernt, die die Anzahl der Operationen begrenzen
- Was ist, wenn der Baum zu groß für den Hauptspeicher ist?
- Externe Datenspeicherung → Speicherhierarchie:



- Zugriffsverhältnis zwischen Hauptspeicher und Festplatte:
  $t(P) / t(H) = (7 \cdot 10^{-3}) / (20 \cdot 10^{-9}) = 3.5 \cdot 10^{5}$

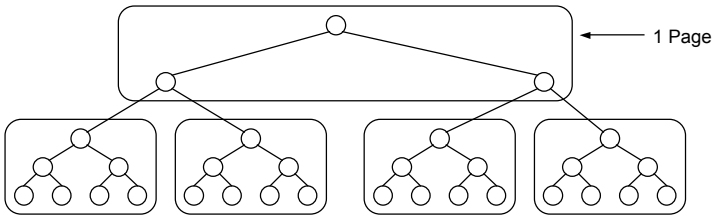
- D.h., Zugriff auf (externe) Knoten sehr teuer
- Bsp. :
  - File-Tree des File-Systems
  - Datenbanken (DB2 (IBM), Sybase, Oracle, …)
- Man hätte gerne einen Baum, der noch geringere Tiefe hat als

$$\log_2(n)$$

- Idee:
  - "Erhöhe die Basis des Logarithmus"
  - oder: speichere mehrere "aufeinanderfolgende" Baum-Knoten auf derselben Seite (*Page*) auf der Platte
  - reduziere damit die Anzahl der Seitenzugriffe

m-Wege-Bäume

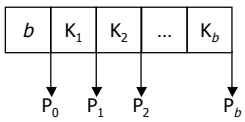
- Ein m-Wege-Suchbaum ist eine Verallgemeinerung eines binären Suchbaumes (d. h., ein binärer Suchbaum ist ein 2-Wege-Suchbaum)



Anstatt 5 nur noch 2 Zugriffe auf Platte / CD

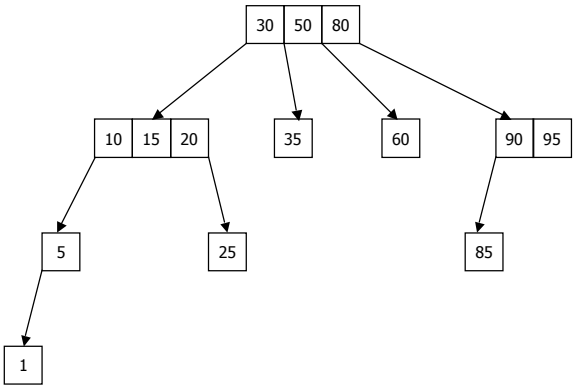
Definition

- In einem *m*-Wege-Baum haben alle Knoten den Grad ≤ *m*
- der Baum ist entweder leer oder besitzt folgende Eigenschaften:
  - jeder Knoten hat folgende Struktur:



    - K_i sind die Schlüssel, $1 \le i \le b$
    - *b* ist die Anzahl der Schlüssel im Knoten
    - P_i sind die Zeiger zu den Unterbäumen des Knotens
  - Schlüssel innerhalb eines Knotens sind aufsteigend geordnet:
    - $K_1 \le K_2 \le \ldots \le K_b$
  - alle Schlüssel im Unterbaum P_i sind kleiner als K_{i+1} , für $0 \le i < b$
  - alle Schlüssel im Unterbaum P_b sind größer als K_b
  - Die Unterbäume P_i , für $0 \le i \le b$, sind ebenfalls m-Wege-Bäume

Beispiel



Bemerkungen

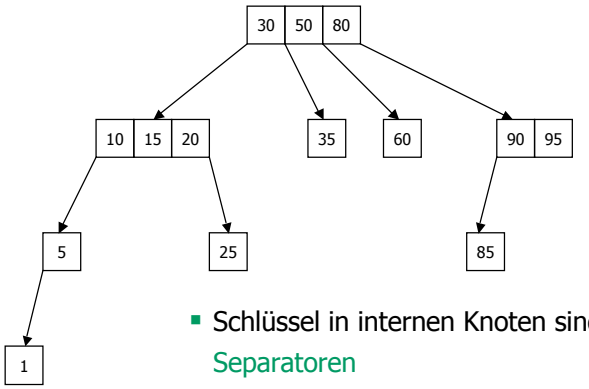
- Probleme:
  - Baum ist nicht ausgeglichen
  - Blätter sind auf verschiedenen Stufen
  - Bei Veränderungen gibt es keinen Ausgleichsalgorithmus
  - Schlechte Speicherausnutzung, kann zu verketteten Listen degenerieren
- Anzahl der Knoten im vollständigen m-Wege Baum mit Höhe h:

$$N = \sum_{i=0}^{h-1} m^i = \frac{m^h - 1}{m - 1}$$

- Maximale Anzahl n von Schlüsseln:
  - Sei b = Anzahl der Schlüssel im Knoten mit Grad m: $b \leq m\text{-}1$
  - $n \leq N \cdot (m\text{-}1) = m^h - 1$
- völlig degenerierter Baum: $n = N = h$
- Grenze für die Höhe eines m-Wege-Baumes: $\log_m(n+1) \leq h \leq n$

Beispiel: Einfügen in einen 4-Wege-Baum

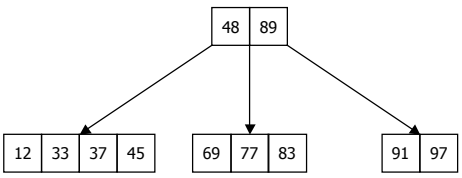
- Einfügen von 20, 35, 5, 95, 1, 25, 85



- Schlüssel in internen Knoten sind Schlüssel und Separatoren
- innerhalb eines Knotens: sequentielle Suche, auch binäre Suche möglich

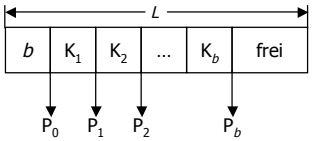
B-Bäume

- vielleicht die Datenstruktur, die in der Praxis am meisten benutzt wird
- B-Bäume sind ausgeglichene m-Wege-Bäume
- Da ein Knoten die Größe einer Übertragungseinheit hat (eine Page der Festplatte, typ. 4-16 kBytes), sind 50 Keys pro Knoten üblich
  - sehr flache Bäume
  - kurzer Weg von der Wurzel zu den Blättern



Definition von B-Bäumen

- jeder Weg von der Wurzel zu einem Blatt ist gleich lang
- jeder Knoten (außer Wurzel) enthält mindestens k und höchstens $2k$ Schlüssel
- jeder Knoten (außer der Wurzel) hat zwischen k+1 und $2k$+1 Kinder (Unterbäume)
- die Wurzel ist entweder ein Blatt oder hat mindesten 2 Kinder
- jeder Knoten hat die Struktur:



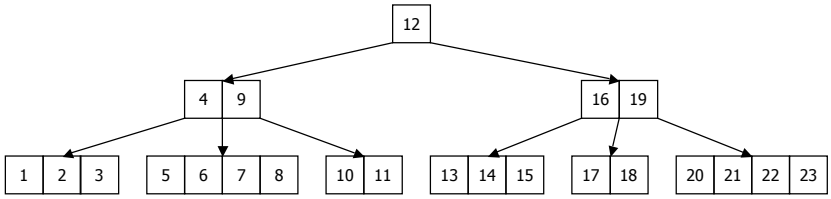
  - b ist die Anzahl der Schlüssel im Knoten, $k \leq b \leq 2k$
  - Schlüssel in Knoten sind aufsteigend sortiert ($K_1 < K_2 < \ldots < K_b$)
  - (L = Größe einer Seite)

Bemerkungen

- CLRS benutzt eine etwas andere Definition:
  - Für einen B-Baum vom Grad t gilt:
    - jeder Knoten, außer der Wurzel, hat mindestens t-1 Schlüssel, also mindestens t Kinder
    - jeder Knoten besitzt höchstens $2t$-1 Schlüssel, also höchsten $2t$ Kinder
  - Formeln müssen „angepasst" werden, damit sie stimmen
  - die Prüfung läuft gemäß den Folien, bei Unsicherheiten die Definition angeben

Die Klasse τ(*k*,*h*)

- die Klasse τ(*k*,*h*) bezeichnet alle B-Bäume mit k>0 und der Höhe $h \geq 0$
- Beispiel: B-Baum der Klasse τ(2,3)



Höhe eines B-Baumes

- Für die Höhe eines B-Baumes mit *n* Schlüsseln gilt:

$$\log_{2k+1}(n+1) \leq h \leq \log_{k+1}\left(\frac{n+1}{2}\right) + 1$$

Erklärung

- in einem minimalen B-Baum hat jeder Knoten die kleinstmögliche Anzahl an Kindern:

$$N_{\min}(k,h) = 1 + 2 + 2\left((k+1) + (k+1)^2 + \cdots + (k+1)^{h-2}\right)$$
$$= 1 + 2\sum_{i=0}^{h-2}(k+1)^i = 1 + 2\frac{(k+1)^{h-1}-1}{k}$$

- in einem maximalen B-Baum hat jeder Knoten die größtmögliche Anzahl ($2k$+1) an Kindern:

$$N_{\max}(k,h) = 1 + (2k+1) + (2k+1)^2 + \cdots + (2k+1)^{h-1}$$
$$= \sum_{i=0}^{h-1}(2k+1)^i = \frac{(2k+1)^h - 1}{2k}$$

- die Höhe definiert eine obere und untere Schranke für die Anzahl der Knoten $N(B)$ eines beliebigen B-Baumes der Klasse $\tau(k,h)$:

$$1 + 2\frac{(k+1)^{h-1}-1}{k} \le N(B) \le \frac{(2k+1)^h-1}{2k} \quad \text{für } h \ge 1$$
$$N(B) = 0 \quad \text{für } h = 0$$

- von $N_{\min}(B)$ und $N_{\max}(B)$ lässt sich ableiten:

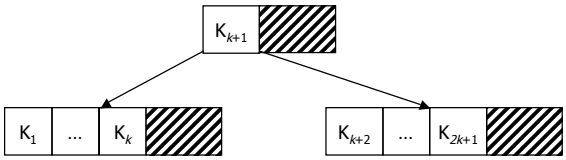
$$n \ge n_{\min} = 1 + 2\frac{(k+1)^{h-1}-1}{k}k = 2(k+1)^{h-1} - 1$$
$$n \le n_{\max} = \frac{(2k+1)^h-1}{2k}2k = (2k+1)^h - 1$$

- Somit gilt für die Schlüsselanzahl in einem B-Baum:

$$2(k+1)^{h-1} - 1 \le n \le (2k+1)^h - 1$$

Einfügen in einen B-Baum

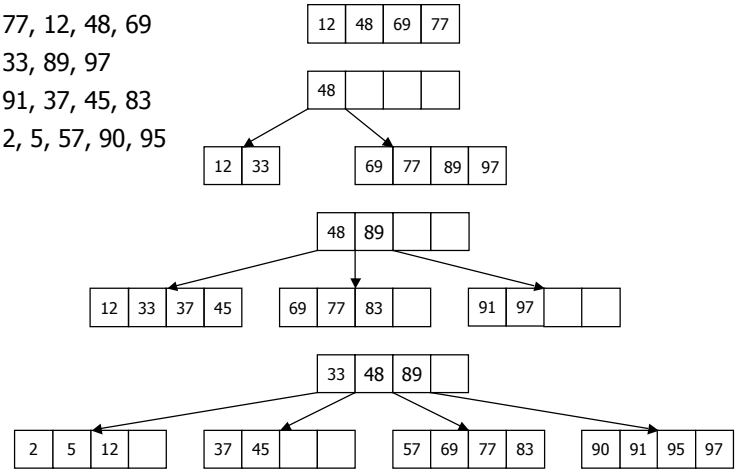
- füge anfangs in ein leeres Feld der Wurzel ein
- die ersten 2*k* Schlüssel werden geordnet in die Wurzel eingefügt
- der nächste, der (2k+1)-te, Schlüssel passt nicht und erzeugt einen "Überlauf"
- die Wurzel wird geteilt, jeder der beiden Knoten bekommt k Keys, ein neuer Knoten wird Wurzel
- die ersten *k* Schüssel kommen in den linkten Unterbaum
- die letzen *k* Schüssel kommen in den rechten Unterbaum
- Der Median der (2k+1) Schlüssel wird zum neuen Separator im neuen Wurzel-Knoten

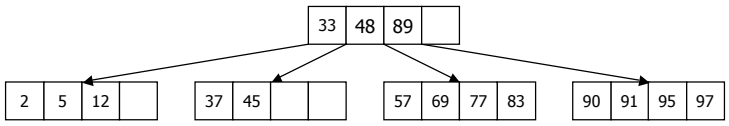


- neue Schlüssel werden in den Blättern sortiert gespeichert
- läuft ein Blatt über (2*k*+1 Keys), wird ein Split durchgeführt:
  - Das Blatt wird geteilt (ergibt 2 Knoten à *k* Keys),
  - diese werden im Vaterknoten anstelle des ursprünglichen Blattes verankert, und
  - der Median-Schlüssel wandert in den Vaterknoten
- ist auch der Elternknoten voll, wird das Splitten fortgesetzt
- Im worst-case bis zur Wurzel

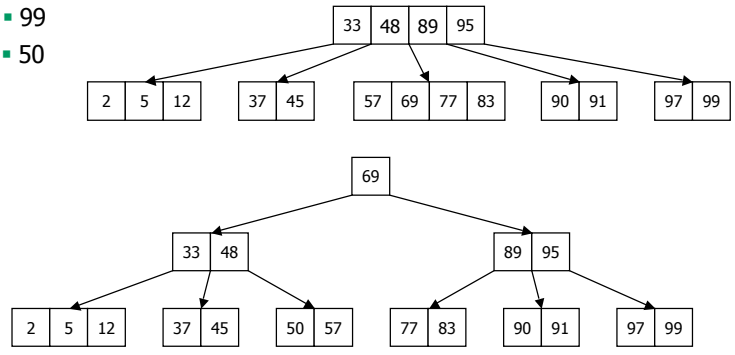
Beispiel

- $k = 2 \rightarrow 2 \leq$ #Schlüssel ≤ 4 (außer Wurzel)
- Einzufügende Schlüssel:
  - 77, 12, 48, 69
  - 33, 89, 97
  - 91, 37, 45, 83
  - 2, 5, 57, 90, 95



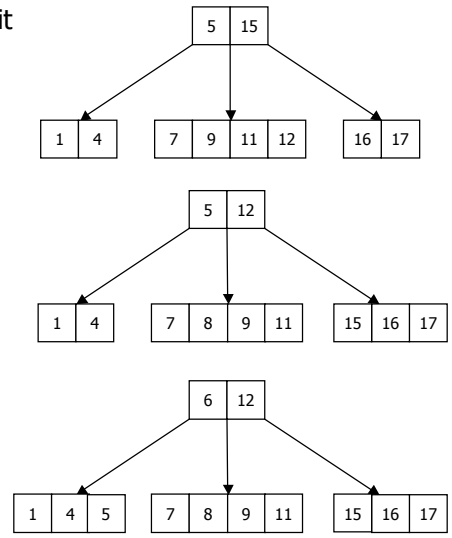


- Einzufügende Schlüssel:
  - 99
  - 50



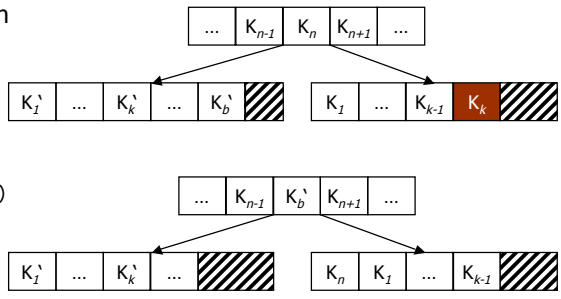
Variante statt Split (B*-Baum)

- Idee: Ausgleich mit Nachbarknoten statt Split
- füge ein:
- 8
- 6



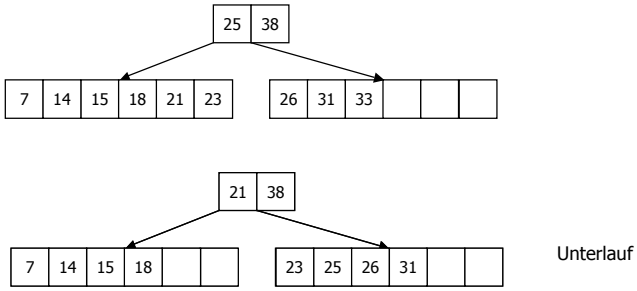
Löschen in einem B-Baum

- Bedingung durch Def.: minimale Belegung eines Knotens erhalten
- Methoden:
  - Ausgleich mit Nachbarknoten (Rotation)
  - Mischung (Merge)
- Beispiel: K_k wird gelöscht:
  - Wende Rotation an
  - Schlüssel K_b' wird in den Vaterknoten verschoben, Schlüssel K_n kommt in den rechten Knoten (mit k-1 Knoten)

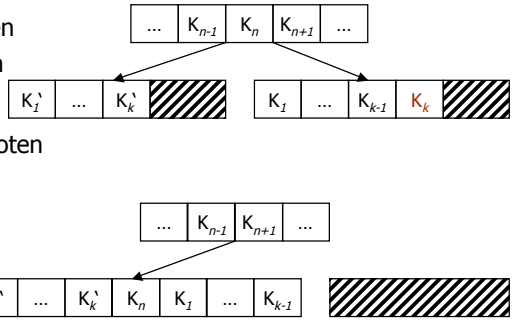


- um wiederholte Anpassungen (durch neue Löschoperationen) zu vermeiden, kann mehr als ein Schlüssel rotiert werden
  - beide Knoten haben danach ungefähr die gleiche Schlüsselanzahl

- Beispiel: 33 soll entfernt werden



- Zweite Art der Unterlauf-Behandlung: Mischen
  - wird benutzt, wenn es einen Unterlauf gibt und beide Nachbarknoten genau *k* Schlüssel haben
  - d.h., man kann nichts vom linken / rechten Knoten "stehlen"
  - Beispiel: K_k löschen



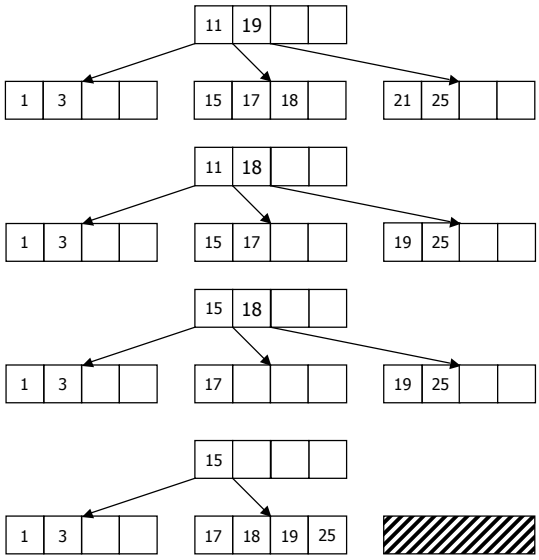
  - Der Seperator und Schlüssel k-1 werden mit den k Schlüsseln im anderen Knoten eingefügt

Allgemeiner Lösch-Algorithmus

- x = zu löschendes Element
- Suche *x*
  - *x* ist in einem Blatt:
    - lösche x
      - #E ≥ k (nach dem Löschen) → OK
      - #E = k-1 und #E' > k → Rotation
      - #E = k-1 und #E' = k → Mischung
  - x ist in einem internen Knoten:
    - ersetze x mit K_b oder K_1' (nächstgößerer oder -kleiner Schlüssel)
    - entferne den Seperator (K_b oder K_1') aus dem entsprechenden Kind-Knoten
    - behandle diesen Kind-Knoten mit Rekursion

Beispiel

- lösche:
- 21
- 11 → Unterlauf
- → Mischen



B^+-Bäume

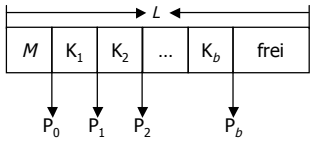
- in einem B-Baum haben die Schlüssel K_i 2 Funktionen:
  - K_i dienen als Seperatoren
  - Nutzdaten werden mit im Baum gespeichert (auch in inneren Knoten)
- ein B^+-Baum teilt diese Eigenschaften auf:
  - K_i werden nur als Seperatoren benutzt (ergibt einen flacheren Baum)
  - Schlüssel werden redundant gespeichert (vereinfachte Lösch-Operationen wiegen den zusätzlichen Speicherbedarf auf)
  - die Blätter werden zu einer Liste verlinkt
  - auf die Daten kann man in sequentieller Ordnung zugreifen
- interne Knoten sind ein sog. Index auf die Blätter

Definition eines B^+-Baum

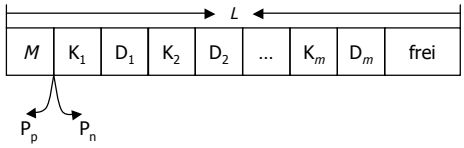
- Seien k, l, h ganze Zahlen mit $h \geq 0$, $k > 0$, $l > 0$
- Ein B^+-Baum der Klasse $\tau(k, l, h)$ ist entweder ein leerer Baum oder ein sortierter Baum mit den folgenden Eigenschaften:
  1. alle Wege von der Wurzel zu einem Blatt haben die gleiche Länge
  2. jeder innere Knoten (außer Wurzel) enthält mindestens k und höchstens $2k$ Schlüssel
  3. jeder innere Knoten (außer der Wurzel) hat zwischen $k+1$ und $2k+1$ Kinder
  4. alle Blätter (außer der Wurzel als Blatt) haben mindestens l und höchstens $2l$ Schlüssel
  5. Schlüssel können mehrfach auf einem Weg zu den Blättern vorkommen
     1. in inneren Knoten nur Seperatoren ohne Nutzdaten ("*satellite data*")
     2. an Blättern zusammen mit den Nutzdaten
  6. Alle Blätter sind zu einer sortierten Liste verlinkt

Format der Knoten

- die internen Knoten haben folgendes Format:

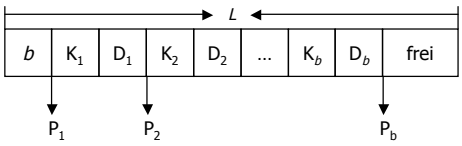


  - *M* gibt den Typ des Knoten und die Anzahl der Schlüssel ($k \le b \le 2k$) an
- die Blätter haben folgendes Format:



  - *M* gibt den Typ des Knoten und die Anzahl der Schlüssel ($l \le m \le 2l$) an
  - P_p zeigt auf den vorhergehenden und P_n auf den nächsten Blatt-Knoten

Größe der Knoten im B-Baum



- *b* ist die Anzahl der Elemente, mit Länge L_b
- Elemente mit fester Länge (L_K und L_D)
- Zeiger haben Länge L_P
- Max. Anzahl der Eintrage ist also:

$$b_{\max} = \left\lfloor \frac{L - L_b - L_P}{L_K + L_D + L_P} \right\rfloor = 2k$$

Größe der Knoten im B⁺-Baum

- für Knoten mit fester Länge L kann k aus L errechnet werden
  - interne Knoten:

$$L = L_M + L_P + 2k(L_K + L_P)$$
$$k = \left\lfloor \frac{L - L_M - L_P}{2(L_K + L_P)} \right\rfloor$$

  - Blätter:

$$L = L_M + 2L_P + 2l(L_K + L_D)$$
$$l = \left\lfloor \frac{L - L_M - 2L_P}{2(L_K + L_D)} \right\rfloor$$

Beispiel

- B⁺-Baum der Klasse τ(3, 2, 3)
  [k = 3 , l = 2, h = 3]