

Fixpunktdarstellung

- Fixed-point numbers
- Bsp. Dezimaldarstellung
 - Dezimalkomma (decimal point) rechts von Stelle mit Wertigkeit 100
 - nachfolgende Stellen haben Wertigkeit 10^{-1} , 10^{-2} , etc.
- Binärdarstellung
 - analog, Wertigkeiten rechts des (gedachten) "Dualpunktes": 2^{-1} , 2^{-2} , etc.

$$w(b_{n-1}b_{n-2} \dots b_0b_{-1}b_{-2} \dots b_{-m}) = f(b_{n-1}, \sum_{i=-m}^{n-2} b_i 2^i)$$

gedachter Dualpunkt

G. Zachmann Informatik 1 - WS 05/06 Repräsentation von Daten 56

- Arithmetische Operationen
 - genau wie bei Darstellung ganzer Zahlen
 - vor Ausführung muß sichergestellt sein, daß der Dualpunkt bei allen Operanden an derselben Stelle steht
 - Danach mit Binärzahlen wie mit Integer-Binärzahlen rechnen
 - Zum Schluß evtl. Dualpunkt wieder an die richtige Position rücken
- Häufige Konvention: bei 32 Bit Darstellung 16.16 Bit
- Achtung bei Multiplikation: 32x32 Bit \rightarrow 64 Bit, muß wieder auf 32 Bit "zurechtgestutzt" werden!

G. Zachmann Informatik 1 - WS 05/06 Repräsentation von Daten 57

Floating-point Zahlen

- Probleme von Fixpunktzahlen
 - sehr **große** Zahlen, können nicht dargestellt werden, da Wertigkeit des höchstwertigen Bits festgelegt ist \rightarrow Überlauf (overflow)
 - sehr **kleine** Zahlen, können nicht dargestellt werden, da Wertigkeit des niederwertigsten Bits festgelegt ist \rightarrow Unterlauf (underflow)
- wünschenswert
 - großes Intervall des Zahlenstrahls darstellbar
 - große Genauigkeit bei kleinen Zahlen, kleinere Genauigkeit bei großen Zahlen
- Lösung: FP-Zahlen ("Gleitpunktdarstellung")
 - entspricht Exponentialschreibweise: $0.4711 \cdot 10^4$
 - Darstellung mit Hilfe von
 - Mantisse mit Vorzeichen
 - Exponent mit Vorzeichen

G. Zachmann Informatik 1 - WS 05/06 Repräsentation von Daten 58

- Darstellung

m_{n-1}	m_{n-2}	...	m_0	e_{k-1}	e_{k-2}	...	e_0
Mantisse mit Vorzeichen				Exponent mit Vorzeichen			
- Berechnung des Wertes

$$w(m_{n-1} \dots m_0 e_{k-1} \dots e_0) = w(m_{n-1} \dots m_0) \cdot 2^{w(e_{k-1} \dots e_0)}$$

G. Zachmann Informatik 1 - WS 05/06 Repräsentation von Daten 59

Beispiel

- $(6.125)_{10}$ könnte dargestellt werden als

0	1	1	0	0	0	1	0	0	1	1
---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---

Mantisse
Vorzeichen Mantisse

Exponent
Vorzeichen Exponent
- Probe**
 $(0.110001)_2 \cdot 2^3 = (110.001)_2 = 2^2 + 2^1 + 2^{-3} = 4 + 2 + 0.125$

G. Zachmann Informatik 1 - WS 05/06 Repräsentation von Daten 60

Normalisierte Gleitpunktdarstellung

- Darstellung bisher nicht eindeutig
 $1.101100 \cdot 2^5 = 0.110110 \cdot 2^6 = 0.011011 \cdot 2^7$
- Definition Normierung:**

Eine FP-Zahl zur Basis 2 heißt normalisiert, falls gilt:
 $1 \leq |w(m)| < 2$
- höchstwertiges Bit der Mantisse = 1
 - höchstwertiges Bit ist damit redundant und kann weggelassen werden
 - diese Darstellung nennt man auch "Signifikand"

G. Zachmann Informatik 1 - WS 05/06 Repräsentation von Daten 61

Interpretation der Darstellung

- Welche FP-Zahl ist:

0	1	1	0	0	0	1	0	0	1	1
---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---

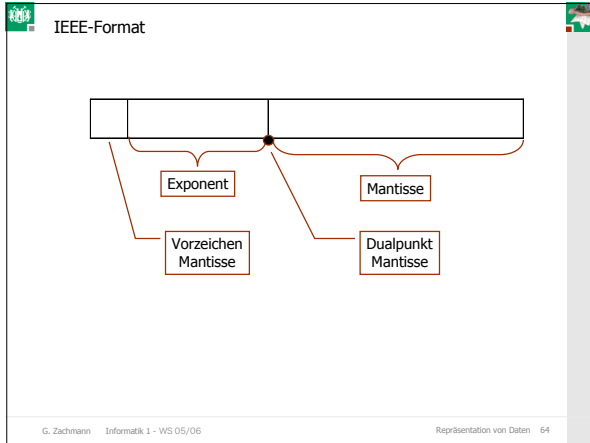
?
- Ist das überhaupt eine Gleitpunktzahl?
 - Länge von Mantisse und Exponent?
 - Zuerst Mantisse oder zuerst Exponent?
 - Zahldarstellung für Mantisse?
 - Zahldarstellung für Exponent?
 - Normalisiert oder nicht?

G. Zachmann Informatik 1 - WS 05/06 Repräsentation von Daten 62

IEEE 754

- Standardisierung sinnvoll, insbesondere bei der Datenkommunikation von Rechner zu Rechner
- Institute of Electrical and Electronics Engineers (IEEE)
 - begann 1979 mit der Erarbeitung eines Standards für Gleitpunktzahlen
 - veröffentlichte das Ergebnis 1985 als Standard "IEEE 754"
- wird seitdem in allen Computern benutzt
- Davor: heilloes Chaos
 - Insbesondere: Dasselbe Programm auf versch Plattformen hatte verschiedene numerische Stabilität und sonstige Eigenschaften

G. Zachmann Informatik 1 - WS 05/06 Repräsentation von Daten 63



- Mantisse
 - Betrag und Vorzeichen
 - Darstellung als Signifikand, d.h.
 - normalisiert
 - führende 1 wird weggelassen (außer bei *extended precision*, s.u.)
 - Dualpunkt hinter führender 1 (vor dargestellten Bits)

0 1 0 0 0 1 0 1 = (1.01000101)₂

G. Zachmann Informatik 1 - WS 05/06 Repräsentation von Daten 65

- Exponent
 - vorzeichenlose ganze Zahl mit *bias*
 - Bem.: $b_{n-1}2^{n-1}$ bei Zweierkomplement war ein Bias
- Definition "Bias":
 - *bias* muß subtrahiert werden, um wahren Exponenten zu erhalten

Engl. *bias*: Hang, Neigung, Vorliebe, Vorurteil.
bezeichnet oft "Verschiebung um additive Konstante"
- die Werte 0...0 und 1...1 sind reserviert

G. Zachmann Informatik 1 - WS 05/06 Repräsentation von Daten 66

- Beispiel (8 Bit Exponent, *bias* 127)
 - wahrer Exponent: $(12)_{10}$
 - Darstellung: $(12)_{10} + (127)_{10} = (139)_{10}$

± 1 0 0 0 1 0 1 1 Mantisse

 - wahrer Exponent: $(-2)_{10}$
 - Darstellung: $(-2)_{10} + (127)_{10} = (125)_{10}$

± 0 1 1 1 1 1 0 1 Mantisse

G. Zachmann Informatik 1 - WS 05/06 Repräsentation von Daten 67

- Exponent 0...0
 - nicht normalisierte Mantisse
 - führendes (weggelassenes) Bit ist 0
 - noch kleinere Zahlen darstellbar
 - Ist Mantisse auch 0...0: Zahl 0 ("+"0" oder "-0")
- Exponent 1...1
 - Mantisse = 0..0
 - unendlich (z.B. x/0) ("+"∞" oder "-∞")
 - Mantisse ≠ 0..0
 - NaN (*not a number*) undefiniertes Resultat (z.B. ∞/ ∞)

G. Zachmann Informatik 1 - WS 05/06 Repräsentation von Daten 68

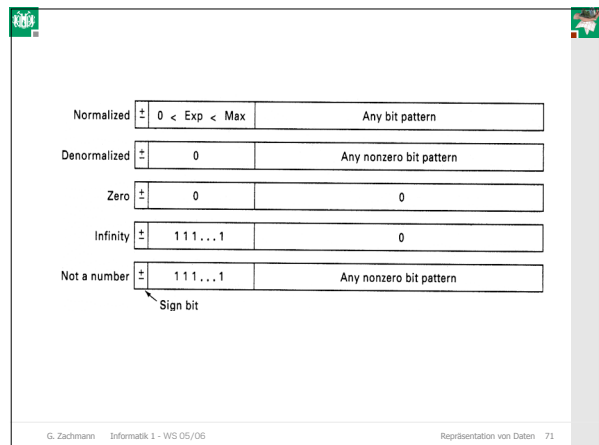
IEEE 754 standardisiert drei Genauigkeiten

- einfache Genauigkeit (*single precision*): 32 Bit
 - Genauigkeit: ca. 7 Dezimalstellen
- doppelte Genauigkeit (*double precision*): 64 Bit
 - Genauigkeit: ca. 15 Dezimalstellen
- erweiterte Genauigkeit (*extended precision*): 80 Bit
 - Genauigkeit: ca. 19 Dezimalstellen
 - wird nur innerhalb FPU zur Reduzierung von Rechenungenauigkeiten benutzt!
 - Default bei allen aktuellen CPUs
 - Läßt sich abschalten

G. Zachmann Informatik 1 - WS 05/06 Repräsentation von Daten 69

Item	Single precision	Double precision
Bits in sign	1	1
Bits in exponent	8	11
Bits in fraction	23	52
Bits, total	32	64
Exponent system	Excess 127	Excess 1023
Exponent range	-126 to +127	-1022 to +1023
Smallest, normalized	2^{-126}	2^{-1022}
Largest, normalized	approx. 2^{+128}	approx. 2^{+1024}
Decimal range	approx. 10^{-38} to 10^{+38}	approx. 10^{-308} to 10^{+308}
Smallest, denormalized	approx. 10^{-45}	approx. 10^{-324}

G. Zachmann Informatik 1 - WS 05/06 Repräsentation von Daten 70



Arithmetische Operationen

- erheblich aufwendiger als bei ganzen Zahlen (in 2er-Komplement)
- alle modernen Prozessoren verfügen über FPU (*floating point unit*)
 - sonst zeitraubende Berechnung in länglichen Unterprogrammen
- nicht jede FPU ist 100% kompatibel zum Standard (i. Allg. aber gut genug)

G. Zachmann Informatik 1 - WS 05/06 Repräsentation von Daten 72

Arbeiten mit FP-Zahlen

- auch "einfache" Dezimalzahlen sind nicht exakt darstellbar (Rundungsfehler)
 - Endlicher Dezimalbruch kann unendlicher Dualbruch sein
 - Beispiel: $0.1_{10} = 0.00011001100110011..._2$
- bei arithmetischen Operationen entstehen weitere Ungenauigkeiten
- Vergleich zweier Gleitkommazahlen ist problematisch

$0.1 * 5 == 0.5 \quad ?!?$
- Man muß beim Programmieren mit FP-Zahlen immer mit Rundungsfehlern rechnen!

G. Zachmann Informatik 1 - WS 05/06 Repräsentation von Daten 73

Verfahren zur Konvertierung dezimal → dual

Ann.: $z < 1$ ("Normierung")

- Schreibe eine 0 als Vorkommastelle
- Falls $z \geq 1$, ziehe 1 von z ab und nenne das Ergebnis wieder z.
- Multipliziere z mit 2 und nenne das Ergebnis wieder z.
- Die Vorkommastelle von z ist nun die nächste duale Nachkommastelle.
- Weiter bei 2.

G. Zachmann Informatik 1 - WS 05/06 Repräsentation von Daten 74

Beispiel

- $z = 0.6$

z_i	Dualzahl (mit Genauigkeit / Bits)
0.6	0.
1.2	0.1
0.4	0.10
0.8	0.100
1.6	0.1001
1.2	0.10011

- Offensichtlich wiederholt sich das Ganze jetzt periodisch, also $0.6_{10} = 0.1001_2$

G. Zachmann Informatik 1 - WS 05/06 Repräsentation von Daten 75

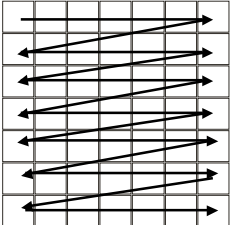
Darstellung von Programmen

- Anweisungen an den Computer, bestimmte Dinge zu tun
- Erstellung eines Programmes als Text (ASCII)
- Übersetzung in Maschinensprache
- Viele andere (Zwischen-)Repräsentationen
 - *Annotated Syntax-Tree*
 - Byte-Code
 - Assembler
 - (s. Compiler-Bau)

G. Zachmann Informatik 1 - WS 05/06 Repräsentation von Daten 76

Grafiken, Bilder

- Bilder werden als Folge von Rasterpunkten dargestellt



Bitmap
(Rastergrafik)

G. Zachmann Informatik 1 - WS 05/06 Repräsentation von Daten 77