





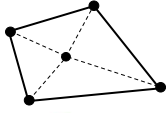
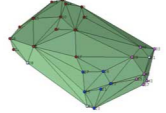
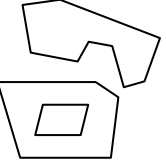


Computer-Graphik II

Verallgemeinerte Baryzentrische Koordinaten

G. Zachmann
Clausthal University, Germany
zach@in.tu-clausthal.de

Verallgemeinerungen der baryzent. Koord.

1. Was macht man im 2D bei (konvexen) Polygon mit $k > 3$ Ecken? 
2. Analog: was macht man im nD bei $k > n+1$ Ecken? 
3. Was macht man bei nicht-konvexen Gebieten? 
4. Was macht man, falls das Gebiet nicht durch Polygonzug (stückweise lineare Kurve) beschränkt ist, sondern durch eine glatte, geschlossene (konvexe) Kurve? 

G. Zachmann Computer-Graphik 2 – SS 10 Verallgemeinerte baryzentrische Koordinaten 2

Literatur

- Siehe die Papers auf der Vorlesungs-Homepage!
 - Unter "Online-Literatur"

G. Zachmann Computer-Graphik 2 – SS 10 Verallgemeinerte baryzentrische Koordinaten 3

Verallg. baryzentrische Koord. für $k > 3$ im 2D



- Definition:

Sei Ω ein konvexes Polygon im \mathbb{R}^2 , gegeben durch n Punkte P_1, \dots, P_n , $n \geq 3$, in CCW-Anordnung („*counter-clockwise*“).

Eine Menge von Funktionen $\lambda_i : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ heißt **baryzentrische Koordinaten**, wenn für alle $X \in \Omega$ folgende Bedingungen gelten:



 1. Teilung der Eins (*partition of unity*): $\sum_{i=1}^n \lambda_i(X) = 1$
 2. Lineare Präzision (*linear precision*): $\sum_{i=1}^n \lambda_i(X) P_i = X$
 3. Konvexe Kombination: $\forall i = 1 \dots n : \lambda_i(X) \geq 0$

G. Zachmann Computer-Graphik 2 – SS 10 Verallgemeinerte baryzentrische Koordinaten 4

- Weitere wünschenswerte Eigenschaften:
 - „Schönes“ Verhalten außerhalb von Ω
 - Glattheit: λ_i soll aus C^∞ sein
 - Affine Invarianz

G. Zachmann Computer-Graphik 2 – SS 10 Verallgemeinerte baryzentrische Koordinaten 5

Interpolationseigenschaft

- Satz:

Solche verallgemeinerten baryzentrischen Koordinaten haben die **Interpolationseigenschaft**.

D.h.: seien in den P_i Datenwerte f_i gegeben, so ist die Funktion

$$f(X) = \sum_{i=1}^n \lambda_i(X) \cdot f_i$$

tatsächlich interpolierend (und nicht etwa approximierend), d.h.

$$\forall i : f(P_i) = f_i$$

G. Zachmann Computer-Graphik 2 – SS 10 Verallgemeinerte baryzentrische Koordinaten 6

Beweis

- Zu zeigen ist:

$$\lambda_i(P_j) = \delta_{ij} \quad (\text{Kronecker Delta})$$

1. Wegen Eigenschaften 1 & 2 kann man alle **linearen** Funktionen reproduzieren. Denn:
Sei $f(P)$ solch eine lineare Funktion.
Dann ist:

$$\begin{aligned} f(P) &= aP_x + bP_y + c \\ &= a \sum \lambda_i(P) P_{i,x} + b \sum \lambda_i(P) P_{i,y} + c \sum \lambda_i(P) \\ &= \sum \lambda_i(P) [aP_{i,x} + bP_{i,y} + c] \\ &= \sum \lambda_i(P) f(P_i) \end{aligned}$$

Eig. 2
(lin. prec.)

Eig. 1
(Teilung der Eins)

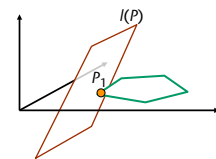
G. Zachmann Computer-Graphik 2 – SS 10 Verallgemeinerte baryzentrische Koordinaten 7

2. Definiere Ebene $l(P)$ so, daß

$$l(P_1) = 0$$

$$\forall i \geq 2 : l(P_i) > 0$$

Das geht, da Ω ein **konvexes** Polygon.



3. Aus (1.) folgt

$$l(P) = \sum_{i=1}^n \lambda_i(P) \cdot l(P_i) = \sum_{i=2}^n \lambda_i(P) \cdot l(P_i)$$

$l(P_1) = 0$

l wurde speziell gewählt, so daß

$$0 = l(P_1) = \sum_{i=2}^n \lambda_i(P_1) l(P_i) \Rightarrow \forall i \geq 2 : \lambda_i(P_1) = 0$$

$l(P_i) > 0$

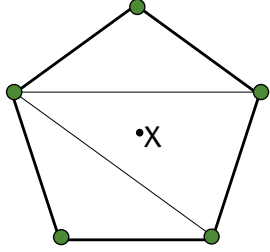
4. Wegen Eigenschaft (1) ist $1 = \sum_{i=1}^n \lambda_i(P_1) = \lambda_1(P_1)$

(3.)

G. Zachmann Computer-Graphik 2 – SS 10 Verallgemeinerte baryzentrische Koordinaten 8

Triviale Lösungen

- Trianguliere das Polygon (irgendwie)
- Bestimme baryzentrische Koordinaten bzgl. des Dreiecks, in dem X liegt



- Probleme:
 - Die Triangulierung ist nicht eindeutig
 - → Diese verallgemeinerten baryzentrischen Koordinaten sind **nicht eindeutig**
 - Die baryzentrischen Koordinaten sind nur C^0 -stetig
 - Fortsetzung für Punkte außerhalb des Polygons ist nicht klar

G. Zachmann Computer-Graphik 2 – SS 10 Verallgemeinerte baryzentrische Koordinaten 9

Konstruktion verallg. baryzent. Koordinaten

- Ziel: baryzentrische Koord. für beliebige, konvexe Polygone in 2D
- Beobachtung: wegen $\sum \lambda_i = 1$ gilt

$$\sum \lambda_i P_i = X \Leftrightarrow \sum \lambda_i \cdot (P_i - X) = 0$$
- Hat man Funktionen $w_i = w_i(X)$, für die

$$\sum w_i \cdot (P_i - X) = 0 \quad (1)$$
 und $\forall i : w_i \geq 0 \quad (2)$
 gilt, so kann man daraus leicht „echte“ baryzentrische Koordinaten machen, indem man

$$\lambda_i = \frac{w_i}{\sum_{i=1}^n w_i}$$
 setzt
- Suche also im Folgenden w_i , die die Bedingungen (1) & (2) erfüllen.

G. Zachmann Computer-Graphik 2 – SS 10 Verallgemeinerte baryzentrische Koordinaten 10

Notation

- Flächeninhalte:
 - $r_i := \|P_i - X\|$
 - $A_i := A_i(X) = \frac{1}{2} \sin \alpha_i \cdot r_i r_{i+1} = \mathcal{F}(\Delta X P_i P_{i+1})$
 - $B_i := B_i(X) = \frac{1}{2} r_{i-1} r_{i+1} \sin(\alpha_{i-1} + \alpha_i) = \mathcal{F}(\Delta X P_{i+1} P_{i-1})$
- Achtung: setze Vorzeichen von B_i negativ, falls X außerhalb $\Delta P_{i-1} P_i P_{i+1}$
- $C_i := C_i(X) = \mathcal{F}(\Delta P_{i-1} P_i P_{i+1}) = A_i + A_{i-1} + B_i$
- Indizes: im Folgenden sind alle Indizes "modulo n " gemeint, d.h. $P_i := P_{i \bmod n}$

und somit $P_{n+1} = P_1$, $P_{-1} = P_{n-1}$

G. Zachmann Computer-Graphik 2 – SS 10 Verallgemeinerte baryzentrische Koordinaten 11

- Erinnerung:
 - Im Dreieck sind $A_i/C_i, B_i/C_i, A_{i-1}/C_i$ baryzentrische Koordinaten, d.h.

$$\frac{A_i}{C_i}(P_{i-1} - X) + \frac{B_i}{C_i}(P_i - X) + \frac{A_{i-1}}{C_i}(P_{i+1} - X) = 0$$

- Also:

$$A_i(P_{i-1} - X) + B_i(P_i - X) + A_{i-1}(P_{i+1} - X) = 0$$

Homogene baryzentrische Koordinaten

G. Zachmann Computer-Graphik 2 – SS 10 Verallgemeinerte baryzentrische Koordinaten 12

- Betrachte jetzt der Reihe nach alle Dreiecke $\Delta P_{i-1} P_i P_{i+1}$
- Ansatz: bilde ein gewichtetes Mittel der (homogenen) baryzentrischen Koordinaten bzgl. jedes dieser Dreiecke:

$$w_i := w_i(X) = \sigma_{i-1}A_{i-2} + \sigma_i B_i + \sigma_{i+1}A_{i+1}$$
 wobei die $\sigma_i := \sigma(X)$ beliebige Funktionen sein dürfen (zunächst).
- Jeder Vertex ist also an 3 baryzentrischen Koordinaten "beteiligt"

G. Zachmann Computer-Graphik 2 – SS 10 Verallgemeinerte baryzentrische Koordinaten 13

- Behauptung 1:
Diese

$$w_i = \sigma_{i-1}A_{i-2} + \sigma_i B_i + \sigma_{i+1}A_{i+1}$$
 erfüllen die Bedingung (1) aus der Definition für baryzentrische Koordinaten
- Beweis:

$$\sum_{i=1}^n w_i(P_i - X) = \sum_{i=1}^n \sigma_i (A_i(P_{i-1} - X) + B_i(P_i - X) + A_{i-1}(P_{i+1} - X)) = 0$$

G. Zachmann Computer-Graphik 2 – SS 10 Verallgemeinerte baryzentrische Koordinaten 14

- **Behauptung 2:**
 Falls das Polygon konvex ist und $\forall i: \sigma_i(X) > 0$
 dann ist $\sum w_i(X) > 0$
 für alle X aus dem Inneren des Polygons.
- **Beweis:**

$$\sum_{i=1}^n w_i(X) = \sum_{i=1}^n \sigma_i(X) \cdot C_i > 0 \quad , \quad \text{da } \forall i: C_i > 0$$
- **Achtung:** $\sigma_i > 0$ alleine garantiert noch nicht $w_i > 0$!
 - Konvexität des Polygons ist nötig ...

G. Zachmann Computer-Graphik 2 – SS 10 Verallgemeinerte baryzentrische Koordinaten 15

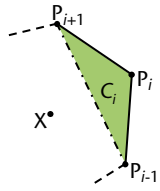
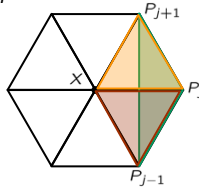
- **Bemerkung:** damit klappt dann auch die Normierung von w_i
 auf λ_i .
 - Erinnerung: $w_i > 0$ benötigt man für Bedingung (2) aus der Definition
- **Ziel:** suche nun nach geeigneten σ_i , so daß $w_i > 0$ und $\sigma_i > 0$

G. Zachmann Computer-Graphik 2 – SS 10 Verallgemeinerte baryzentrische Koordinaten 16

Einige Kandidaten

- Naiver Ansatz: wähle $\sigma_i = \frac{1}{C_i}$
 - Damit wäre $\sum w_i(X) \equiv n$
 - Leider ist $w_i(X) > 0$ nicht garantiert
 - Folge: die Interpolationseigenschaft gilt nicht ☹
- Wachspress-Koordinaten: wähle $\sigma_i(X) = \frac{1}{A_{i-1}A_i}$
 - Damit ist

$$w_i := \frac{\mathcal{F}(\Delta P_{i-1}P_iP_{i+1})}{\mathcal{F}(\Delta XP_{i-1}P_i) \cdot \mathcal{F}(\Delta XP_iP_{i+1})}$$
 - Nachteil: sie verhalten sich in einem nicht-konvexen Polygon unschön, da $\sum w_i(X) = 0$ werden kann, d.h. die λ_i haben dort eine Polstelle

G. Zachmann Computer-Graphik 2 – SS 10 Verallgemeinerte baryzentrische Koordinaten 17

Der beste Kandidat (zur Zeit)

[ca. 2000]

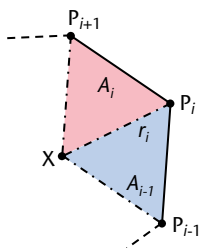
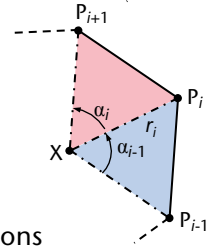
- Mean Value Coordinates (MVCs):**
 - Wähle

$$\sigma_i = \frac{r_i}{A_{i-1}A_i}$$
 - Damit ist

$$w_i(X) = \frac{r_{i-1}A_i + r_iB_i + r_{i+1}A_{i-1}}{A_{i-1}A_i}$$
 - Mit einigen trigonometrischen Umformungen:

$$w_i = \frac{\tan(\alpha_{i-1}/2) + \tan(\alpha_i/2)}{r_i/2}$$
- Behauptung: die MVCs sind baryzentrische Koordinaten für alle X aus dem Inneren des Polygons
- Klar, denn:

wenn X im Inneren \rightarrow alle $\sigma_i > 0$ und alle $w_i > 0$

G. Zachmann Computer-Graphik 2 – SS 10 Verallgemeinerte baryzentrische Koordinaten 18

- Nachweis, daß w_i stimmt:

$$\begin{aligned}w_i &= \sigma_{i-1}A_{i-2} + \sigma_i B_i + \sigma_{i+1}A_{i+1} \\ &= \frac{r_{i-1}}{A_{i-2}A_{i-1}}A_{i-2} + \frac{r_i}{A_{i-1}A_i}B_i + \frac{r_{i+1}}{A_iA_{i+1}}A_{i+1} \\ &= \frac{r_{i-1}}{A_{i-1}} + \frac{r_i}{A_{i-1}A_i}B_i + \frac{r_{i+1}}{A_i} = \dots\end{aligned}$$

- Dann: für A_i und B_i die Flächenformeln mit sin einsetzen und trigonometrische Identitäten verwenden