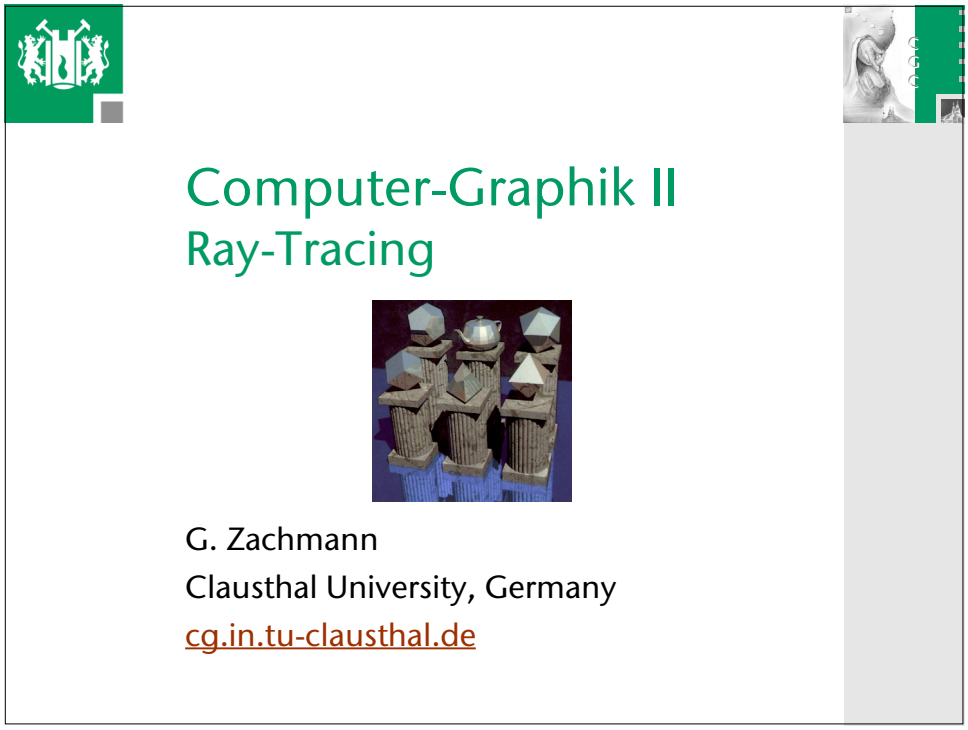


Computer-Graphik II
Ray-Tracing

G. Zachmann
Clausthal University, Germany
cg.in.tu-clausthal.de

Die antike Erklärung des Sehens: Sehstrahlen

Effekte für eine realistischen Darstellung

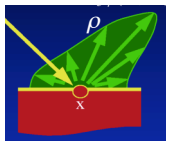
- Das lokale Beleuchtungsmodell versagt bei folgenden Effekten
- (Soft) Shadows (Halbschatten)
- Reflexion (Spiegel und Glanz)
- Transparenz (Wasser, Glas)
- Interreflexion (*"color bleeding"*)
- ...

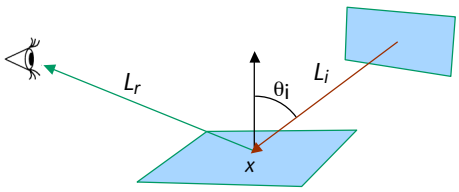
Globale Beleuchtungsrechnung

- Ziel: Photorealistisches Rendering
- Die "Lösung": die Rendering-Gleichung [Kajiya, Siggraph 1986]

$$L_r(x,\omega_r) = L_e(x,\omega_r) + \int_\Omega \rho(x,\omega_r,\omega_i) L_i(x,\omega_i) \cos(\theta_i) d\omega_i$$

L_i = aus Richtung ω_i inzidentes "Licht"
L_e = emittiertes Licht
L_r = in Richtung ω_r reflektiertes Licht
ρ = Reflexionskoeffizientenfunktion (BRDF)
Ω = Halbkugel um Normale





- Analytische Lösung ist unmöglich!
- Die Rendering Gleichung kann als rekursive Funktion aufgefaßt werden
- Daraus folgen praktische Approximations-Verfahren, die auf der Verfolgung des Lichts entlang Strahlen beruhen
  - Ray tracing [Whitted, Siggraph 1980, "An Improved Illumination Model for Shaded Display"]
  - Radiosity [Goral et. al, Siggraph 1984, "Modeling the Interaction of Light between diffuse Surface"]
  - Monte Carlo Verfahren

Turner Whitted, Microsoft Research

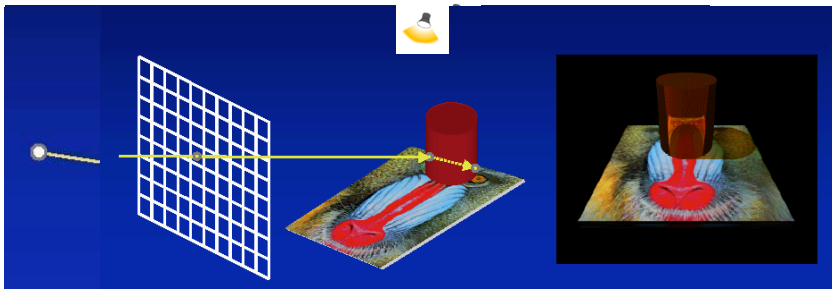
Rekursives Ray-Tracing

- Algorithmus zur Approximation der Rendering-Gleichung
- Modelliert werde nur:
  - Reflektion
  - Beugung
  - Verdeckungsrechnung
  - Schatten

- Strahlen werden nur in Richtung des reflektierten bzw. gebrochenen Strahls verfolgt
- Annahmen:
  - Punktlichtquellen
  - Phong-Modell
  - keine Halbschatten

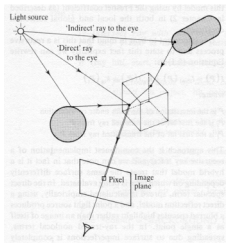
Funktionsweise

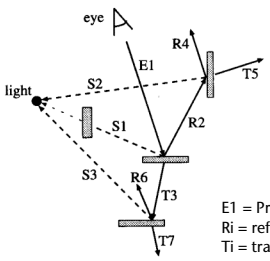
1. Synthetische Kamera = Augpunkt + Bildebene in Weltkoordinaten
2. Schieße Strahlen vom Augpunkt aus durch die Pixel in die Szene
3. Falls der Strahl mehr als ein Objekt schneidet, betrachte nur den ersten Schnittpunkt
4. Schieße weitere Strahlen vom dort zu allen Lichtquellen (Schattenstrahlen; *"shadow feelers"*)
5. Treffen diese Schattenstrahlen auf ein Objekt, so liegt der betrachtete Flächenpunkt im Schatten. Ansonsten wird das Phong-Beleuchtungsmodell ausgewertet
6. Ist das sichtbare Objekt spiegelnd, dann schieße weiteren reflektierten Strahl in die Szene
7. Ist das Objekt transparent, so wird zusätzlich ein gebrochener Strahl weiterverfolgt

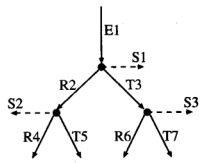


Der Strahlbaum

- Grundidee des Raytracing: Strahlengänge von den Lichtquellen bis zum Auge konstruieren, aber dabei beim Auge starten und diese Strahlengänge rückwärts "suchen"
- Ergibt (konzeptionell!) einen Strahlenbaum:

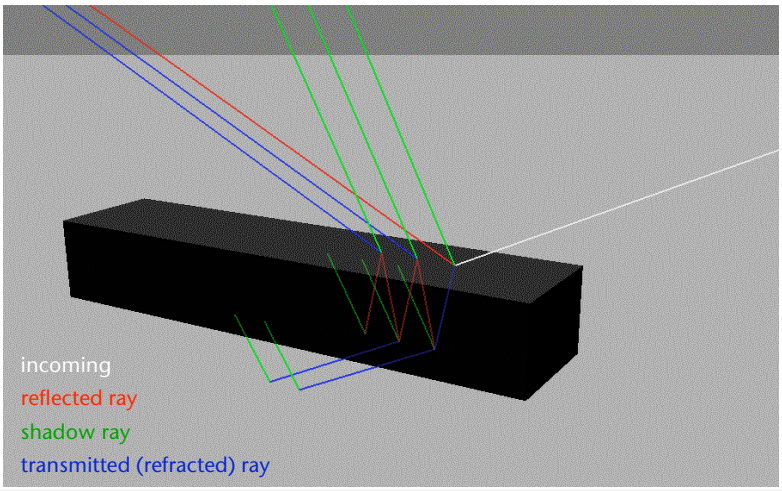






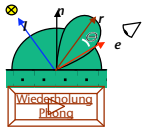
E1 = Primärstrahl Si = Schattenstrahl
Ri = reflektierter Strahl
Ti = transmittierter Strahl

- Visualisierung eines Strahlbaumes (eignet sich hervorragend zum Debugging)



Das Beleuchtungsmodell

- Beleuchtung auf der Fläche

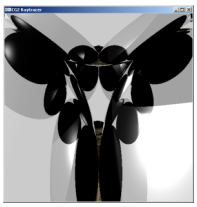


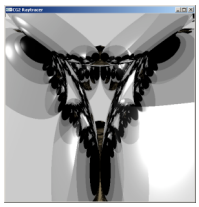
$$L_{ges} = L_{Phong} + r_s L_s + r_t L_t$$

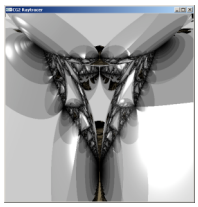
r_s = Reflexionskoeffizient für das reflektierte Licht L_s

r_t = Transmissionskoeffizient für das transmittierte Licht L_t

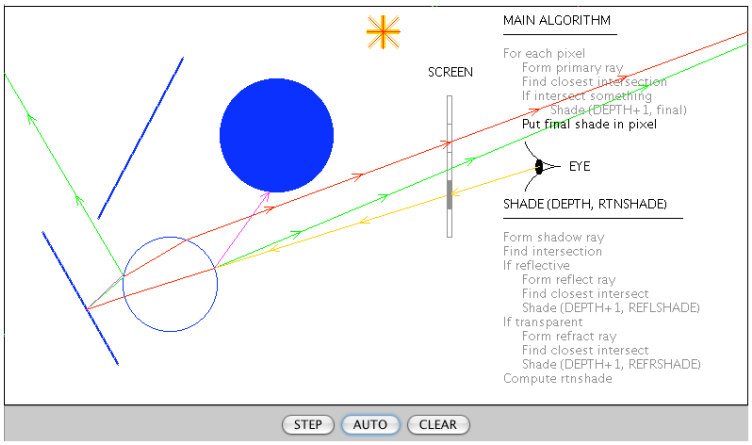
- Abbruch der Rekursion:
  - Falls maximale Rekursionstiefe erreicht; oder/und,
  - falls Beitrag zur Beleuchtung zu klein (schrumpft wie r_t^n)


Rek. Tiefe: 3


Rek. Tiefe: 5

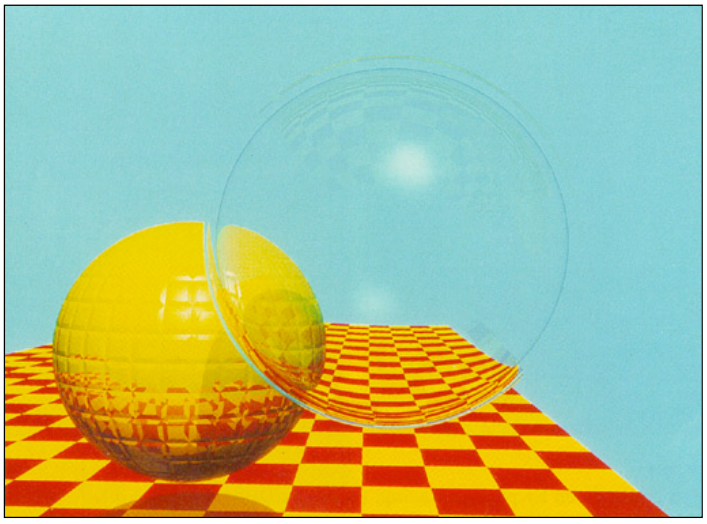

Rek. Tiefe: 100

Demo



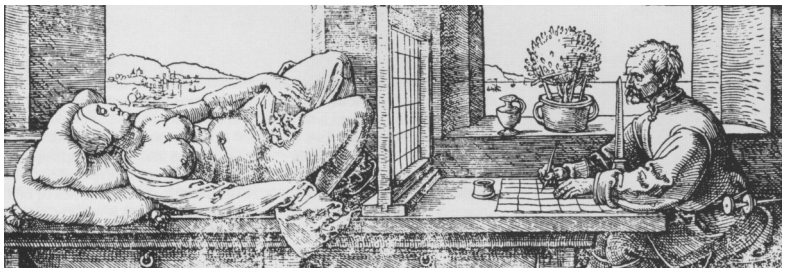
http://www.siggraph.org/education/materials/HyperGraph/raytrace/rt_java/raytrace.html

Eines der ersten Ray-Tracing-Bilder



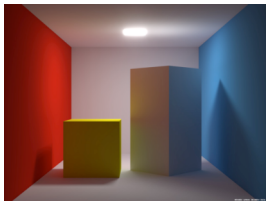
Turner Whitted 1980

Albrecht Dürers "Ray-Casting-Maschinen" [16. Jhrdt.]

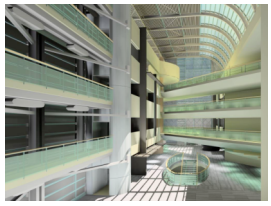


Beispiele

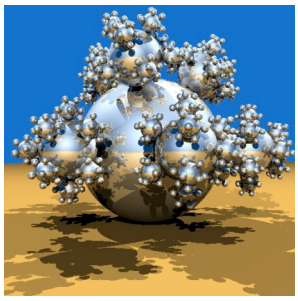
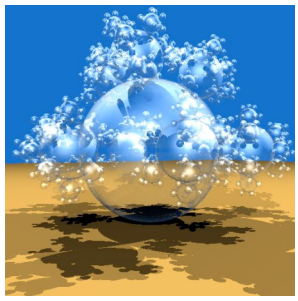
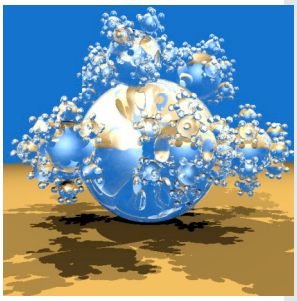


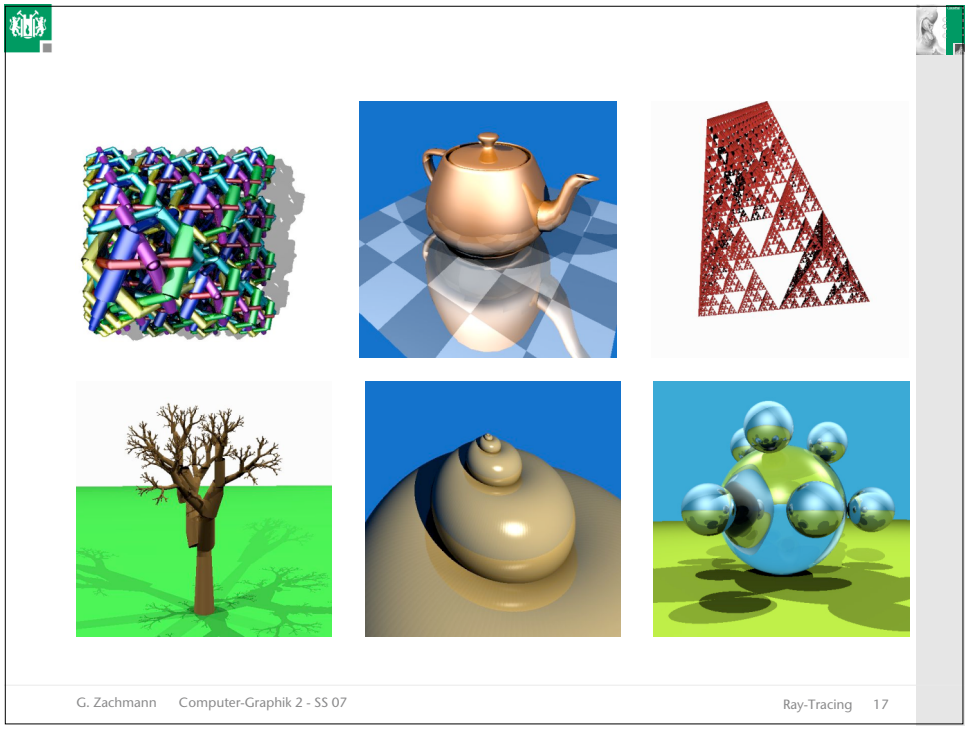


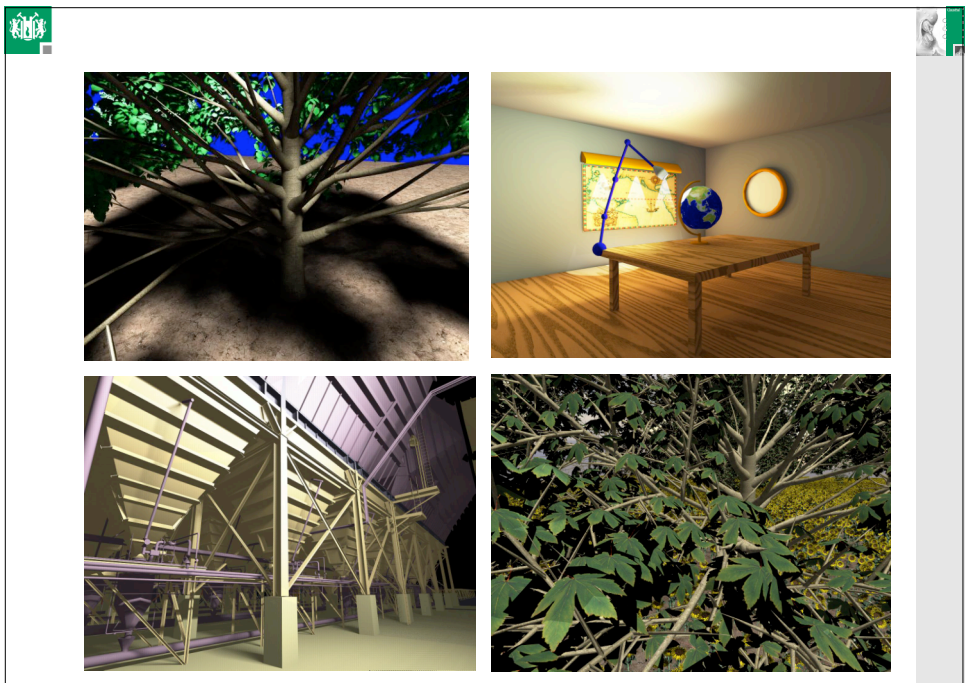


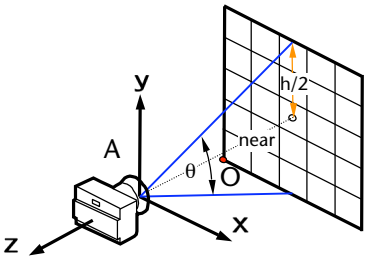

Jensen, Lightscape





Die Kamera (ideale Lochkamera)



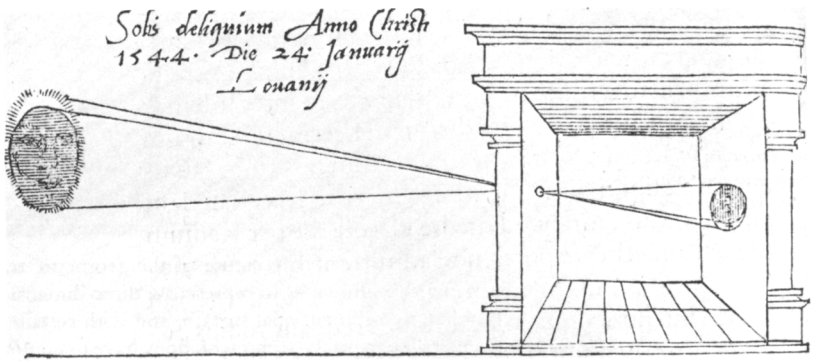
$$h = 2 \cdot \text{near} \cdot \tan\frac{\theta}{2}$$

$$O = A - \text{near} \cdot \mathbf{z} - \frac{b}{2}\mathbf{x} - \frac{h}{2}\mathbf{y}$$

Die Main-Loop eines Ray-Tracers

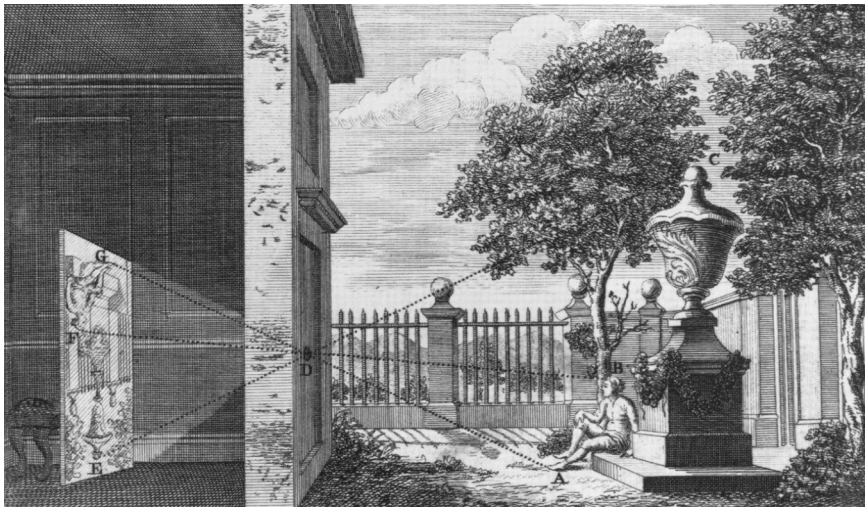
```
for ( t = 0; t < h; t ++ )
  for ( s = 0; s < b; s ++ )
    ray.from = A
    ray.at = O + s·x + t·y
    trace( 0, ray, &color );
    putPixel( x, y, color );
```


Älteste Abbildung einer Lochkamera



Von R. Gemma Frisius, 1545

Camera Obscura

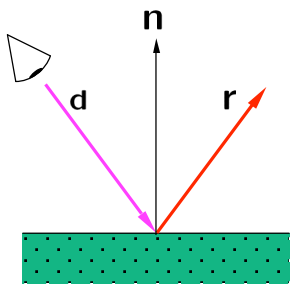


Andere sonderbare Kameras

- Mit Ray-Tracing sind andere Projektionen sehr einfach
- Z.B. Fischauge, Omnimax, Panorama

Sekundärstrahlen

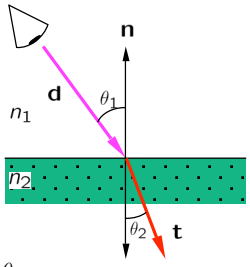
- Annahme: Hit zwischen Primärstrahl und Szene gefunden
- Reflektierter Strahl: klar



Gebrochener Strahl

- Brechungsgesetz [Snell ~1600] :

$$n_1 \sin\theta_1 = n_2 \sin\theta_2$$



- Der transmittierte Strahl:

$$\mathbf{t} = \frac{n_1}{n_2}(\mathbf{d} + \mathbf{n}\cos\theta_1) - \mathbf{n}\cos\theta_2$$

$$\cos\theta_1 = -\mathbf{dn}$$

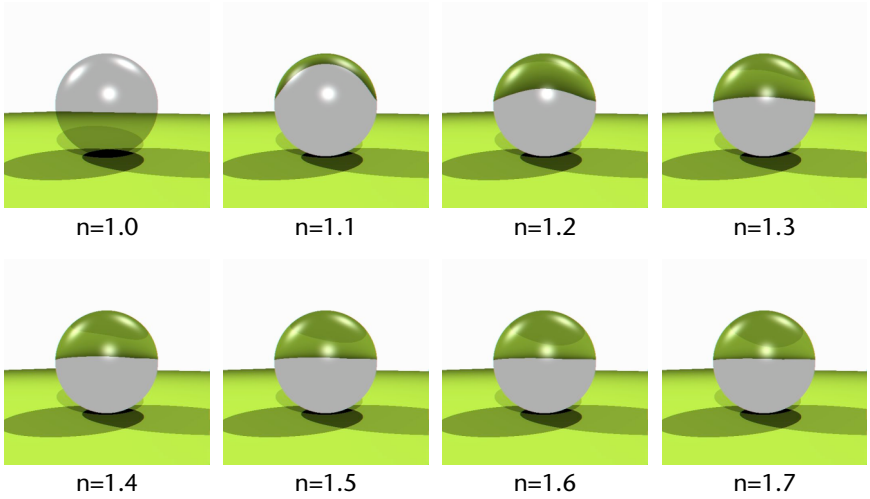
$$\cos^2\theta_2 = 1 - \frac{n_1^2}{n_2^2}\left(1 - (\mathbf{dn})^2\right)$$

- Brechungsindizes:

Luft	Wasser	Glas	Diamant
1.0	1.33	1.5 - 1.7	2.4

- Totalreflexion:
  wenn Radikand < 0 $\Leftrightarrow \sin\theta_2 \leq \frac{n_1}{n_2}$

Wirkung des Brechungsindex



Was können wir hier noch nicht simulieren?

Fresnel-Terme

- Beim Wechsel von einer Materie in eine andere wird immer ein Anteil Licht reflektiert, der restliche Anteil gebrochen
- Der Reflexionskoeffizient ρ hängt ab vom Brechungsindex der beiden Materialien und vom Einfallswinkel:

$$\rho_{\parallel} = \frac{n_2 \cos\theta_1 - n_1 \cos\theta_2}{n_2 \cos\theta_1 + n_1 \cos\theta_2}$$

$$\rho_{\perp} = \frac{n_1 \cos\theta_1 - n_2 \cos\theta_2}{n_2 \cos\theta_1 + n_1 \cos\theta_2}$$

$$\rho = \frac{1}{2} \cdot \left(\rho_{\parallel}^2 + \rho_{\perp}^2\right)$$

- Beispiel:
  - Luft (n = 1.0) nach Glas (n = 1.5), senkrechter Lichteinfall:

$$\rho_{\parallel} = \frac{1.5-1}{1.5+1} = \frac{1}{5} \quad \rho_{\perp} = \frac{1-1.5}{1.5+1} = \frac{1}{5} \quad \rho = \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{25} = 4\%$$

  - D.h., beim Übergang von Luft nach Glas wird 4% des Lichtes reflektiert, der Rest gebrochen
- Approximation der Fresnel-Terme [Schlick 1994]:

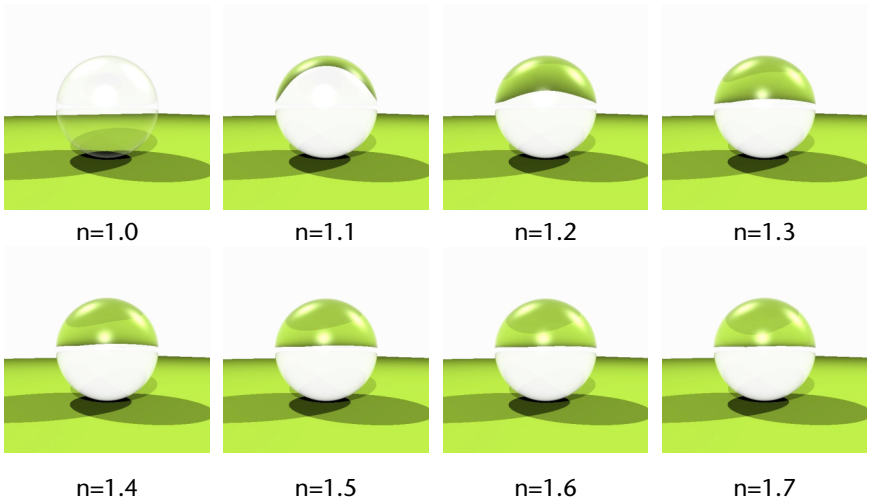
$$\rho(\theta) \approx \rho_0 + (1-\rho_0)\,(1-\cos\theta)^5$$

$$\rho_0 = \left(\frac{n_2 - 1}{n_2 + 1}\right)^2$$

wobei ρ_0 der Fresnel-Term des senkrechten Lichteinfalls ist und θ der Winkel im dünneren Medium (also der größere).

  - 1-ρ ergibt dann den transmittierten Anteil

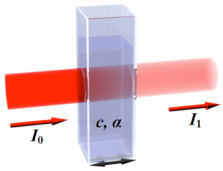
Beispiel für Brechung unter Berücksichtigung der Fresnel-Terme



Dämpfung im Medium

- Die durch ein Medium transportierte Lichtintensität schwächt sich mit zunehmender Entfernung gemäß dem Lambert-Beer'schen Gesetz ab:

$$I(s) = I_0 e^{-\alpha s}$$

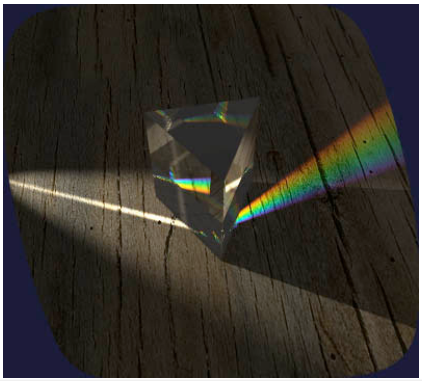


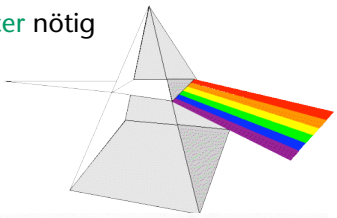
wobei α eine Materialkonstante ist
und s der im Medium zurückgelegte Weg.

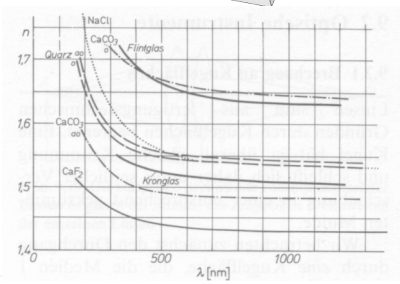
- α kann auch von Wellenlänge abhängen

Dispersion

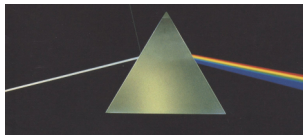
- Brechungsindex ist abhängig von der Wellenlänge
- Diese Effekte lassen sich allerdings in RGB nicht mehr abbilden; hierzu wäre ein „spektraler“ Ray-Tracer nötig







Giovanni Battista Pittoni, 1725,
"An Allegorical Monument to Sir Isaac Newton"



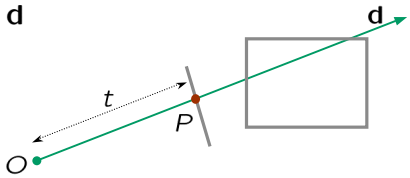
Pink Floyd, *The Dark Side of the Moon*

Beispiel mit Fresnel-Term und Dispersion

Schnittberechnungen

- Der wesentliche Bestandteil der Rechenzeit
- Gegeben: Menge Objekte (Polygone, Kugeln, ...) und Strahl

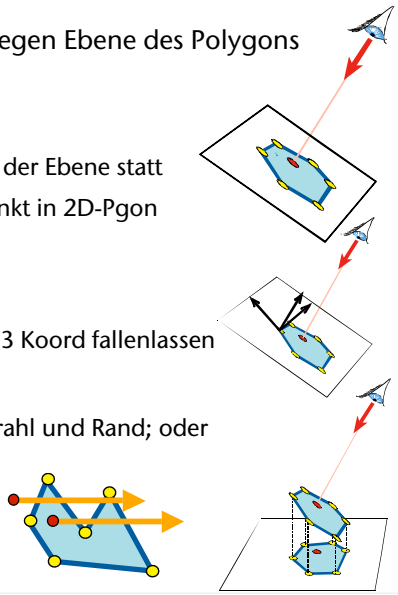
$$P(t) = O + t \cdot \mathbf{d}$$



- Gesucht: Linienparameter t des ersten Schnittpunktes $P = P(t)$ mit der Szene

Schnitt Strahl—Polygon

- Schneide Strahl (parametrisch) gegen Ebene des Polygons (implizit) → Punkt
- Teste "Punkt in Polygon"
  - Dieser Test findet ausschließlich in der Ebene statt
  - 3D-Punkt in 3D-Polygon ↔ 2D-Punkt in 2D-Pgon
- Projiziere Punkt & Polygon
  - Entlang der Normale: zu teuer
  - Auf Koord.ebene: einfach eine der 3 Koord fallenlassen
- Test "Punkt in Polygon":
  - Zähle Anzahl Schnitte zwischen Strahl und Rand; oder
  - Bestimme "Winding Number"



Interludium: Die vollständige Ray-Tracing-Routine

```
traceRay( ray ):
  hit = intersect( ray )
  if no hit:
    return no color
  reflected_ray = reflect( ray, hit )
  reflected_color = traceRay( reflected_ray )
  refracted_ray = refract( ray, hit )
  refracted_color = traceRay( refracted_ray )
  for each lightsource[i]:
    shadow_ray = calcLightFeeler( hit, lightsource[i] )
    if intersect(ray):
      light_color[i] = 1
  overall_color = shade( hit,
                         reflected_color,
                         refracted_color,
                         light_color )
  return overall_color
```

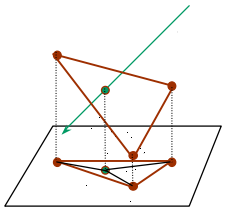
hit ist eine Datenstruktur, die alle Infos über einen Schnitt zwischen Strahl und Szene enthält, u.a. Schnittpunkt, Objekt, Normale, ...

Diese **intersect**-Funktion kann deutlich optimiert werden gegenüber der obigen; außerdem interessiert nur ein Schnitt **vor** der Lichtquelle.

Wertet die Beleuchtungsgleichung für das getroffene Obj aus.

Schnitt Strahl—Dreieck [Badouel 1990]

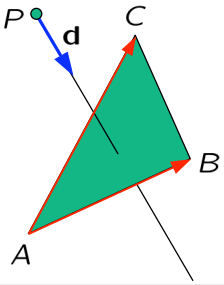
- Verwende Methode Strahl—Polygon; oder
- Cleverer sein: baryzentrische Koordinaten + Projektion
- Schneide Strahl mit Ebene (Normalenform) → t → Punkt
- Projiziere Punkt & Dreieck in Koord.ebene
- Berechne baryzentrische Koord. des 2D-Punktes
- Baryzentrische Koord. des 2D-Punktes = baryzentrische Koord. des 3D-Punktes!
- 3D-Punkt in Dreieck ↔ $\alpha,\beta,\gamma > 0$, $\alpha+\beta+\gamma < 1$
- Alternative Methode: siehe Möller & Haines "Real-time Rendering"
- Code: http://jgt.akpeters.com/papers/MollerTrumbore97/
- Geht noch schneller, falls Schnittpunkt nicht nötig [Segura & Feito]



Alternative Schnittberechnung Strahl—Dreieck [Möller]

- Geradengleichung $X = P + t \cdot \mathbf{d}$
- Ebenengleichung $X = A + r \cdot (B - A) + s \cdot (C - A)$
- Gleichsetzen $-t \cdot \mathbf{d} + r \cdot (B - A) + s \cdot (C - A) = P - A$
- In Matrixschreibweise $\begin{pmatrix} -\mathbf{d} & B - A & C - A \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} t \\ r \\ s \end{pmatrix} = P - A$

$\mathbf{u} = B - A$
$\mathbf{v} = C - A$
$\mathbf{w} = P - A$



$$\begin{pmatrix} t \\ r \\ s \end{pmatrix} = \frac{1}{\det(-\mathbf{d}, \mathbf{u}, \mathbf{v})} \cdot \begin{pmatrix} \det(\mathbf{w}, \mathbf{u}, \mathbf{v}) \\ \det(-\mathbf{d}, \mathbf{w}, \mathbf{v}) \\ \det(-\mathbf{d}, \mathbf{u}, \mathbf{w}) \end{pmatrix}$$

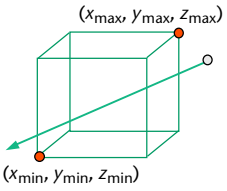
$$\det(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}) = \mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c})$$

$$\begin{pmatrix} r \\ r \\ s \end{pmatrix} = \frac{1}{(\mathbf{d} \times \mathbf{v}) \cdot \mathbf{u}} \cdot \begin{pmatrix} (\mathbf{w} \times \mathbf{u}) \cdot \mathbf{v} \\ (\mathbf{d} \times \mathbf{v}) \cdot \mathbf{w} \\ (\mathbf{w} \times \mathbf{u}) \cdot \mathbf{d} \end{pmatrix}$$

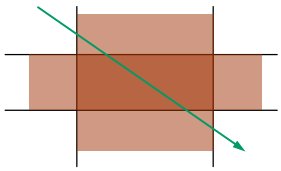
- Kosten: 2 Kreuzprodukte + 4 Skalarprodukte
- Liefert: Geradenparameter + baryzentrische Koordinaten bzgl. Dreieck
- Test ob s,t im Bereich (0,1) und s+t <= 1

Schnitt Strahl — Box

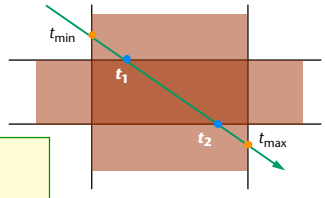
- Box (Quader) wird später noch wichtig als Bounding Box
- Hier: nur achsenparallele Boxes (AABB = *axis-aligned bounding box*)
- Definition einer AABB: durch die zwei extremen Eckpunkte
  $(x_{min}, y_{min}, z_{min})$ und $(x_{max}, y_{max}, z_{max})$



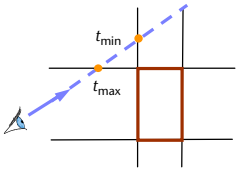
- Idee des Algo:
  - Eine Box ist der Schnitt von 3 *Slabs* (ein *Slab* = Schicht des Raumes, wird von 2 parallelen Ebenen begrenzt)
  - Jeder Slab schneidet vom Strahl ein Intervall heraus
  - Betrachte also sukzessive jeweils Paare von Box-Seiten

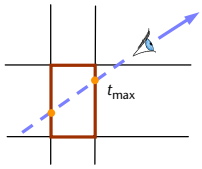


- Der Algorithmus:



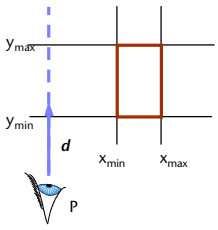

```
setze tmin = -∞ , tmax = +∞
loop über alle Paare von Ebenen:
  schneide Strahl mit den
           beiden Ebenen → t1 , t2
  if t2 < t1:
    vertausche t1 , t2
  // jetzt gilt: t1 < t2
  tmin ← max(tmin, t1 )
  tmax ← min(tmax, t2 )
// now: [tmin,tmax] = interval inside box
if tmin > tmax → kein Schnitt
if tmax < 0    → kein Schnitt
```





Bemerkungen

- Optimierung: beide Ebenen eines Slabs haben dieselbe Normale
  - Spart ein Skalarprodukt
- Bemerkung: der Algo funktioniert genauso für "schiefe" Boxes (sog. *OBBs = oriented bounding boxes*)
- Weitere Optimierung: falls AABB, nutze aus, daß die Normalen nur 1 Komponente ≠ 0 haben!
- Achtung: teste auf Parallelität!
  - "shit happens"
  - Im Fall der AABB:




```
if |dx| < ε:
  if Px < xmin || Px > xmax:
    Strahl geht an Box vorbei
  else:
    t1, t2 = ymin, ymax     // evtl noch swappen!
```

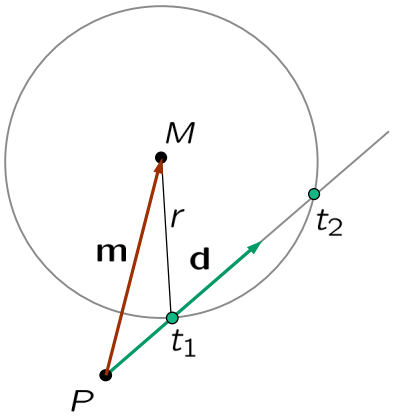
Schnitt Strahl—Kugel

- Annahme: **d** normiert
- Ansatz:

$$|t \cdot \mathbf{d} - \mathbf{m}| = r$$

$$(t \cdot \mathbf{d} - \mathbf{m})^2 = r^2$$

$$t^2 - 2t \cdot \mathbf{md} + \mathbf{m}^2 - r^2 = 0$$

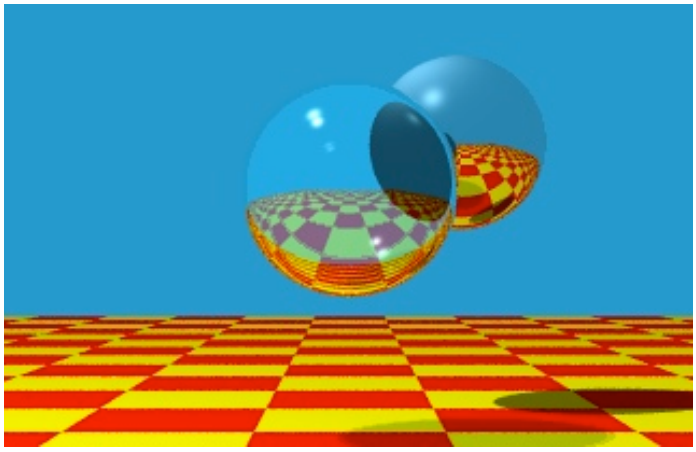


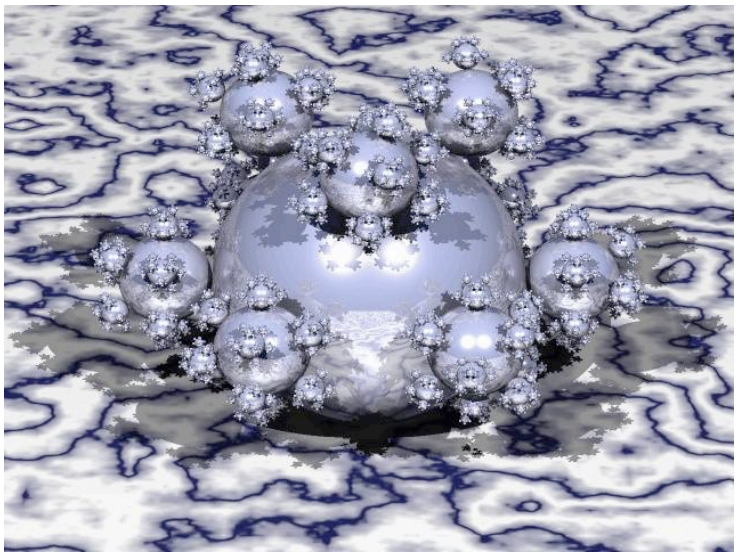
- Es gibt noch andere Ansätze ...

- Der Algorithmus, mit kleinen Optimierungen:

```
berechne m² − r²
berechne b = m · d
if m² − r² >= 0       // Blickpunkt ausserhalb Kugel
    and b <= 0 :      // sieht von Kugel weg
then
      return "kein Schnittpunkt"
setze d = b² − m² + r²
if d < 0:
    return "kein Schnittpunkt"
if m² − r² > ε :
    return t1 = b − √d   // enter; l1 > 0
else:
    return t2 = b + √d   // leave;  l2 > 0
```

- Es ist so einfach, daß alle Ray-Tracer Kugeln haben!





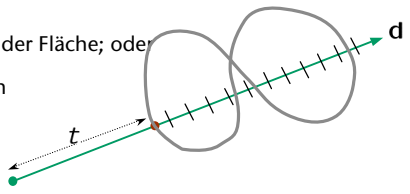
Die sog. "sphere flake"

Geometrisch vs. Algebraisch

- Die algebraische Methode ist einfach und generisch
- Die geometrische Methode ist schneller
  - Durch geometrische Einsicht
  - Frühe Tests
  - Insbesondere für die Strahlen, die weg zeigen

Schnitt Strahl – implizite Fläche

- Implizite Fläche vom Grad n: $F(x, y, z) = 0$
- Strahl: $P(t) = O + t \cdot \mathbf{d}$
- Einsetzen: $F(P(t)) = 0$
  liefert Polynom in t vom Grad n
- Nullstellensuche:
  - Falls Grad < 5: nach t auflösen
  - Intervallschachtelung, Newton-Verfahren, ...
  - Startwerte:
    - Schnitt zwischen Strahl und BBox der Fläche; oder
    - Strahl innerhalb der BBox abtasten
- Z.B.: Kugel ...



Nullstellensuche mit Laguerre's Methode

- Eine von wenigen "*sure-fire*"-Methoden
- Algorithmus erfordert Arithmetik mit komplexen Zahlen, auch wenn alle Wurzeln reell sind (und damit auch alle Koeffizienten)
- Sehr wenig theoretische Erkenntnisse zum Konvergenzverhalten
- Sehr viel empirische Hinweise, daß Algo (fast) **immer** zu einer Wurzel konvergiert, und zwar von (fast) **jedem** Startwert aus!
- Konvergenz-Ordnung 3, falls die Wurzel einfach ist

Motivation für den Algorithmus

- Gegeben:

$$P(x) = (x - x_1)(x - x_2)\dots(x - x_n) \tag{0}$$

- Beziehungen:

$$\ln|P(x)| = \ln|x - x_1| + \ln|x - x_2| + \dots + \ln|x - x_n|$$

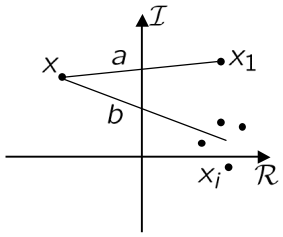
$$\frac{d}{dx}\ln|P(x)| = \frac{1}{x - x_1} + \dots + \frac{1}{x - x_n} = \frac{P'(x)}{P(x)} =: G \tag{1}$$

$$\frac{d^2}{dx^2}\ln|P(x)| = -\frac{1}{(x - x_1)^2} - \dots - \frac{1}{(x - x_n)^2}$$

$$= \frac{P''(x)}{P(x)} - \left(\frac{P'(x)}{P(x)}\right)^2 =: -H \tag{2}$$

- Sei X unsere aktuelle Näherung an Wurzel x_1
- "Drastische" Annahme:
  - Abstand $|x - x_1| = a$
  - Abstand zu allen anderen Wurzeln ist

$$|x - x_i| \approx b, \quad i = 2, 3, \ldots, n$$



- Dann kann man (1) & (2) so darstellen

$$G \approx \frac{1}{a} + \frac{n-1}{b} \tag{3}$$

$$H \approx \frac{1}{a^2} + \frac{n-1}{b^2} \tag{4}$$

- Einsetzen ergibt Lösung für a:

$$a \approx \frac{n}{G \pm \sqrt{(n-1)\left(nH - G^2\right)}} \tag{5}$$

  - VZ so wählen, daß $|a|$ minimal wird
  - Wurzel kann negativ werden

    $\rightarrow a$ kann komplex werden
  - Neue Näherung für x_1 ist

$$x_1 = x - a$$

Algorithmus

wähle x_0
loop:

berechne $G = \frac{P'(x_l)}{P(x_l)}$

$H = G^2 - \frac{P''(x_l)}{P(x_l)}$

berechne $a = \frac{n}{G \pm \sqrt{(n-1)(nH - G^2)}}$

setze $x_{l+1} = x_l - a$

until a **"klein genug" oder** $k \geq max$

- Achtung: möglichst Code aus *Numerical Recipes* verwenden
  - Selbst implementieren ist fehlerträchtig
  - NR-Code hat elegantes Abbruchkriterium
- Für Ray-Tracing: alle Nullstellen berechnen
  - faktorisiere gefunde Nullstelle aus, wiederhole Laguerre n Mal

Instancing / Strahltransformation

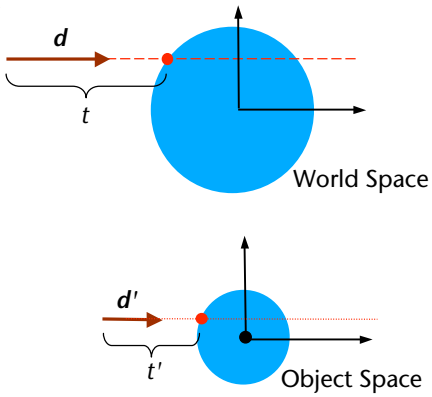
- Kompliziertere (transformierte) Formen lassen sich oft reduzieren auf einfache (kanonische) Formen
- Idee: transformiere Strahl; führe Schnitt mit der einfachen Form durch; transformiere Schnittpunkt und -normale zurück
- Beispiel Ellipsoid:

berechne $P'(t) = \mathbf{M}^{-1}O + t\mathbf{M}^{-1}d$
schneide $P'(t)$ mit Einheitskugel $\rightarrow P'$, $\mathbf{n}'$, t'
$P := \mathbf{M} \cdot P'$; $\mathbf{n} := (\mathbf{M}^{-1})^T \cdot \mathbf{n}$; $t :=?$

- Falls M keine Skalierung enthält, dann ist

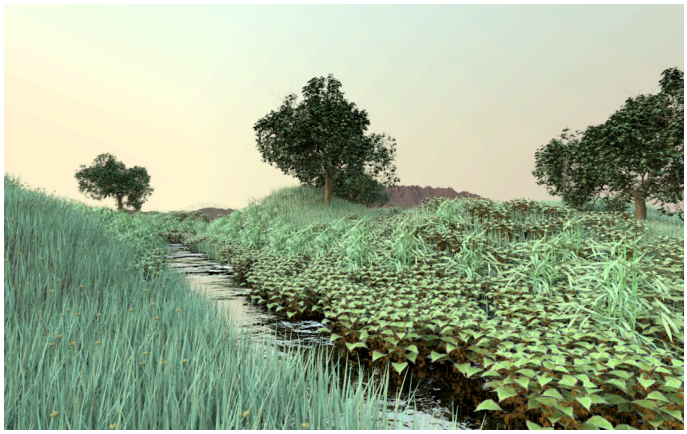
$$\|d'\| = \|\mathbf{M}^{-1}d\| = \|d\| \;\Rightarrow\; t = t'$$

- Falls M eine Skalierung enthält:
  - $\|d'\| \neq \|d\|$
  - Normiere d nicht!
  - Damit ist $t = t'$
  - Einzige Bedingung: in den Schnittberechnungen darf man nirgendwo die Annahme $\|d'\| = 1$ machen.



Weiterer Grund für *Instancing*

- Speichereinsparung: nur mittels Instancing passen solch riesige Szenen komplett in den Speicher



61 unique plant models, 1.1M unique triangles, 300MB —
4000 plants in the scene, 19.5M triangles

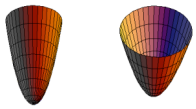
Weitere Quadriken

- Mit diesen Techniken kann man viele weitere Objekte testen
  - Parametrische Liniengleichung in implizite Form des Objektes einsetzen
  - Ergibt Polynom in t vom Grad 2, 4, ...
  - Nach t lösen (analytisch, Newton, ...)
- Unendlicher Zylinder:

$$x^2 + y^2 = 1$$

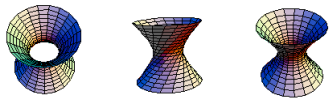
- Paraboloid:

$$x^2 + y^2 - z = 0$$



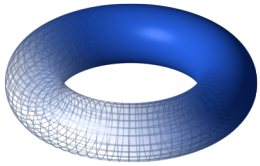
- Hyperboloid (*one sheet*):

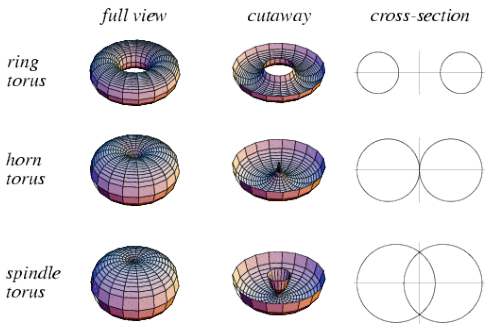
$$x^2 + y^2 - z^2 = 1$$

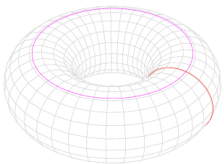


- Torus:

$$\left(c - \sqrt{x^2 + y^2}\right)^2 + z^2 = a^2$$



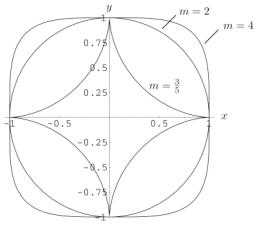




Superquadrics

- Verallgemeinerungen der Quadriken
- Super-Ellipsoid:

$$\left(\frac{x}{a}\right)^p + \left(\frac{y}{b}\right)^q + \left(\frac{z}{c}\right)^r = 1$$



- Super-Hyperboloid:

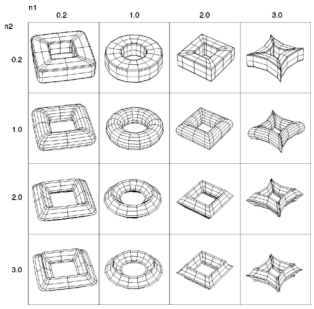
$$\left(\frac{x}{a}\right)^p + \left(\frac{y}{b}\right)^q - \left(\frac{z}{c}\right)^r = 1$$

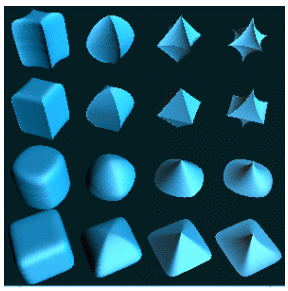
- Super-Toroid:

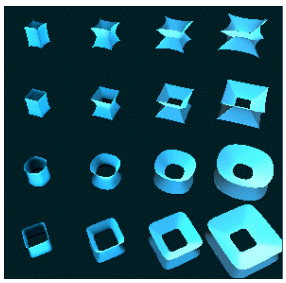
$$\left(d - \left(\left(\frac{x}{a}\right)^m + \left(\frac{y}{b}\right)^n\right)^q\right)^r + \left(\frac{z}{c}\right)^p = e^2$$

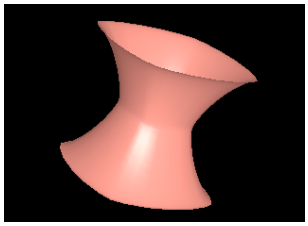
- Achtung: hier ist immer $|x|^p$ gemeint!

Beispiele von Super-Quadrics









XScreenSaver demo "SuperQuadrics" (www.jwz.org/xscreensaver)

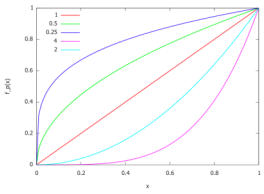
Ratioquadrics

[Blanc & Schlick, 1996]

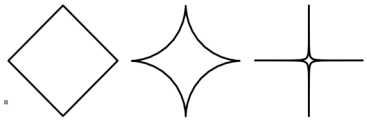
- Variante der Superquadrics mit u.U. besseren Eigenschaften
- Idee der Superquadrics kann man auch so schreiben:

$$F(x,y,z) = f_p(\tfrac{x}{a}) + f_q(\tfrac{y}{b}) + f_r(\tfrac{z}{c}) - 1$$

$$f_p(x) = |x|^p$$

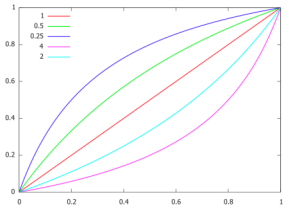


- Problem:
  - $f_p(x)$ ist an der Stelle x=0 nicht differenzierbar für $p \le 1$
  - Dadurch entstehen für p < 1 "Spitzen", die möglicherweise unerwünscht sind
  - Außerdem ist $f_p(x)$ rel. teuer auszuwerten



- Simple Idee: verwende einfach eine andere "Potenzfunktion"
- Die Pseudo-Potenzfunktion von Blanc & Schlick:

$$g_p(x) = \frac{x}{p + (1-p)x}$$



- Die Ratioquadric für "Ratio-Ellipsoide" ist damit

$$F(x,y,z) = g_p(\tfrac{x}{a}) + g_q(\tfrac{y}{b}) + g_r(\tfrac{z}{c}) - 1$$

- Resultat: